



Relatório

Projeto de construção de uma montanha-russa

EL SATURNO

Física 12º ano

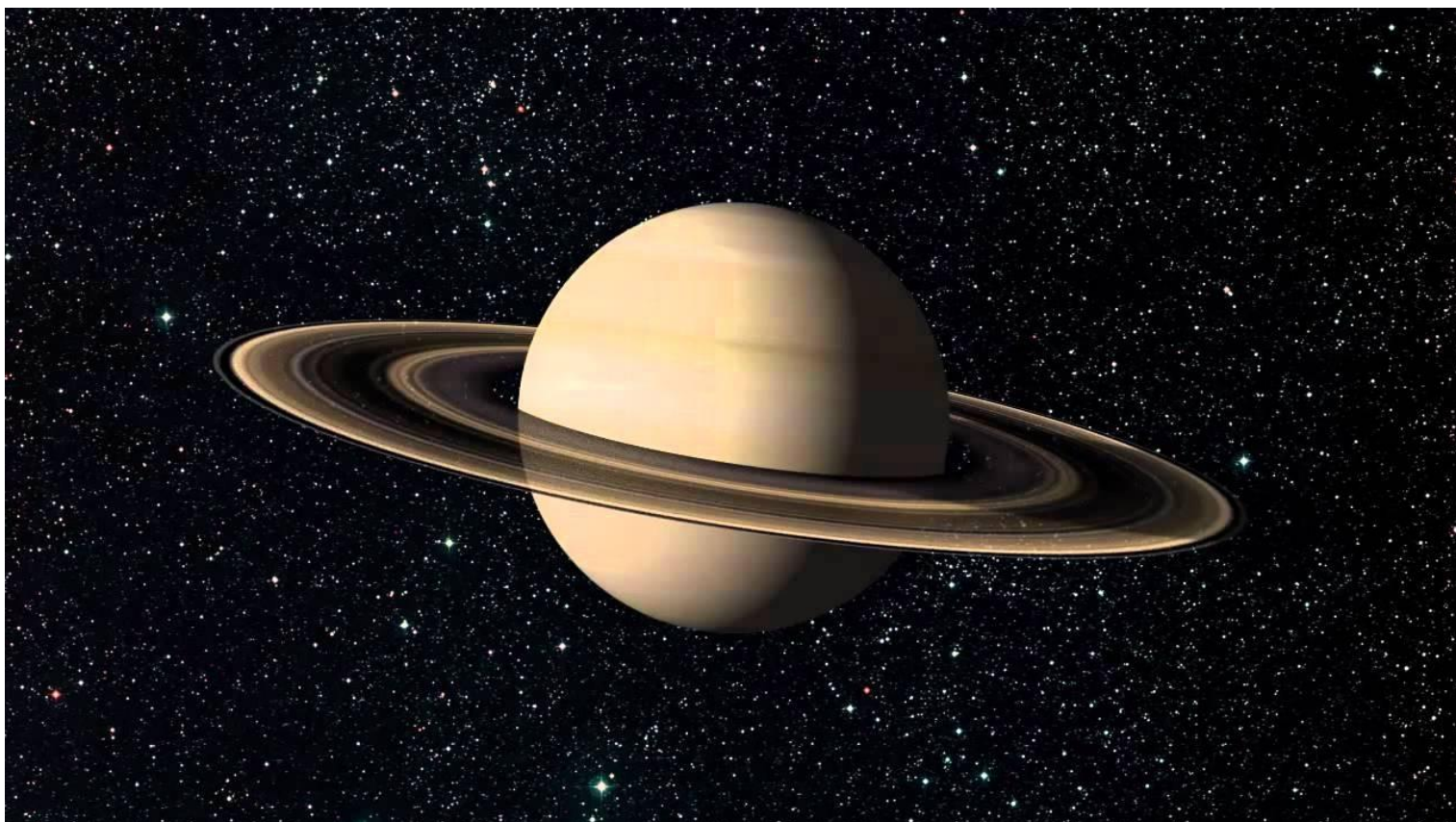
Professora: Filipa Batalha

Alexandre Reis nº1

Duarte Morais nº10

Gonçalo Sousa nº12

Joana Caramelo nº14





ÍNDICE

Resumo	3
Saturno, o “Senhor dos Anéis” do Sistema Solar	4
Introdução teórica	5
Cronograma	18
Material	20
Metodologia	20
Procedimento	27
Registo de resultados	30
Tratamento de resultados	32
Crítica	37
Conclusão	42
Bibliografia	43



RESUMO

Foi nos proposta a realização de um projeto de construção de uma montanha-russa para a disciplina de física de 12º ano. A montanha-russa tinha que respeitar algumas normas concretas, das quais:

- Ter um máximo de 75cm de altura, 1m de comprimento e 40cm de largura;
- Ter um lançamento de projétil com um alcance mínimo de 1m;
- Ter um looping com um diâmetro de, no mínimo, 20cm;
- Ser totalmente planeada e executada pelo grupo;
- Cumprir as condições mínimas de segurança.

Assim, o nosso grupo optou por ir um pouco **mais além** dos objetivos iniciais, e, com imensa **dedicação**, foi conseguida a construção de uma montanha russa com 3 caminhos distintos, cujo tema era o planeta **Saturno**.

O primeiro caminho é o caminho cujo looping tem um diâmetro de cerca de 23 cm (é o maior looping da montanha) e cujo projétil cai num funil feito de cartão que se encontra no chão. Após entrar no funil, a bola segue um trilho até um elevador de cartão e madeira que irá depois subir, devido à tensão feita por um fio ligado a uma garrafa com água, até à altura inicial dos caminhos da montanha-russa. Depois da abertura manual da porta de cartão do elevador, a bola entra num caminho aéreo constituído por um tubo de PVC e cai no terceiro caminho desta construção (assim chamado por ter sido o terceiro a ser construído)

O terceiro caminho da montanha-russa é bastante simples, tendo apenas um pequeno looping com 8cm de diâmetro. É, após ter percorrido este caminho, que a bola (projétil) é lançada obtendo, então, um alcance de cerca de 1m.

O segundo caminho da construção é um caminho bastante complexo e **divertido**. É constituído por um trilho aéreo que, após uma ligeira descida tem um pequeno looping de 8cm de diâmetro. A bola segue então, caindo em outro trilho que simboliza os anéis do planeta saturno (planeta esse que se encontra suspenso no meio do looping do primeiro caminho). Após ter percorrido os anéis, a bola irá então entrar dentro de uma pequena estação espacial do planeta (uma caixa de cartão).

Para decorar a montanha optou-se por um tema espacial. Para tal, utilizámos diversos objetos decorativos tais como o planeta Saturno (bola de esferovite pintada de dourado), os restantes planetas do sistema solar (feitos em cartão), um foguetão espacial de cartão, uma sonda espacial de cartão, um “cartão de cidadão” do planeta Saturno, etc (...).

PALAVRAS CHAVE:

- Mais além
- Dedicação
- Saturno
- Divertido



SATURNO, O “SENHOR DOS ANÉIS” DO SISTEMA SOLAR

A nossa montanha-russa foi inspirada no tema do espaço/Universo, mais especificamente no planeta Saturno, o segundo maior do Sistema Solar e sexto a contar do Sol, daí o nosso projeto se denominar “El Saturno”.

Saturno é um gigante gasoso, localizado após Júpiter e antes de Úrano, sendo principalmente constituído por hidrogénio e hélio. Este planeta possui cerca de 95 massas terrestres e é o planeta menos denso do sistema solar.

Visto da Terra, Saturno aparenta ser uma estrela brilhante no céu, facilmente visível e apenas após a invenção do telescópio foi possível descobrir que o mesmo tinha anéis e satélites. Os seus anéis são constituídos, essencialmente, por restos de meteoros e cristais de gelo e os seus 60 satélites/luas mais conhecidos são: Titã, Encélado, Mimas, Tétis, Febe e Japeto.

As “riscas” douradas que podemos observar em Saturno são provocadas por ventos extremamente rápidos existentes nas suas camadas atmosféricas mais altas que podem atingir os 2000 km/h, combinados com o calor proveniente do interior do planeta.

Apertem os cintos, pois a missão El Saturno’19 está prestes a começar e, ao contrário da missão Cassini-Huygens, datada de 1997, a deste ano será tripulada e terá como objetivo estudar o planeta e os seus satélites naturais.



Fig.1 - Saturno



INTRODUÇÃO TEÓRICA

Este projeto serviu, em grande parte para aplicar algumas das leis da física que conhecemos, num caso concreto e real. Assim sendo, todos os componentes da montanha russa foram executados com base em princípios físicos, princípios esses que serão desenvolvidos e explicados, no contexto da montanha russa, ao longo da introdução teórica.

Descida inicial

Na montanha russa foram feitos três percursos, com formas e trajetórias distintas, mas todos com algo em comum, pelo menos uma rampa por onde a bola desce e aumenta a sua velocidade inicial.

Este aumento de velocidade pode ser estudado se, ao considerarmos as forças de atrito desprezáveis, considerarmos um sistema conservativo (a bola) sobre a qual apenas é aplicado o peso.

Assim, através da lei da conservação da energia mecânica, podemos concluir que a energia mecânica inicial da bola será igual à sua energia mecânica final pois a variação de energia mecânica será, em módulo, igual ao trabalho das forças não conservativas que, como são desprezáveis, será nulo. Podemos então concluir que como a bola é inicialmente largada com velocidade nula, então toda a sua energia mecânica inicial existirá sobre a forma de energia potencial gravítica e à medida que desce a rampa, como a sua altura diminui, a sua energia potencial diminui, transformando-se em energia cinética o que aumenta a velocidade da bola.

Para além das descidas iniciais de cada percurso, também estão presentes outras descidas no meio ou final de cada percurso que têm a mesma função, aumentar a velocidade da bola e que funcionam da mesma maneira, através da transformação de energia potencial gravítica em energia cinética, aumentando a velocidade e mantendo a energia mecânica da bola constante, considerando as forças não conservativas, desprezáveis.

Looping

Um looping consiste, basicamente, num movimento circular, ou aproximadamente circular, percorrido por um corpo, sobre um plano vertical, através da ação de uma força resultante que permite a variação da velocidade do corpo, tanto em módulo como em direção, permitindo ao corpo executar tal trajetória.

Para podermos analisar o comportamento de um corpo que percorre um looping e as forças que nele são aplicadas, primeiro é preciso compreender o conceito de forças de ligação.

Forças de ligação

Tal como o nome indica, forças de ligação são pares de forças aplicados entre dois corpos e que os ligam, isto é, que fazem com que a posição e trajetória de um seja afetada pela força de ligação aplicada pelo outro corpo.



Estas podem resultar do contacto direto entre dois corpos, como a força de reação normal e a força de atrito entre um corpo e uma superfície ou por contacto indireto, por exemplo através de um fio que une os dois corpos e a partir do qual um aplica uma força de ligação, sobre a forma de tensão, sobre o outro corpo. Assim, as forças de ligação são, principalmente, o atrito, a normal e a tensão.

Ao longo de um movimento, ao contrário do peso, a intensidade e direção das forças de ligação podem variar, dependendo da aplicação de outras forças num corpo, a trajetória do corpo, a rugosidade de uma superfície ou a velocidade de um corpo em relação a outro.

Forças aplicadas durante o looping

Ao analisar o funcionamento de um looping e de um objeto a percorrê-lo, podemos perceber que, caso o atrito seja desprezável, apenas são aplicadas no corpo duas forças, o peso e a força de reação normal, antes, durante e no futuro imediato após percorrer o looping.

Através das definições destas duas forças podemos concluir que o peso terá sempre direção vertical e sentido de cima para baixo, com intensidade constante e igual à massa do corpo multiplicada pela aceleração gravítica. Este não é, então, uma força de ligação, mas sim uma força de aplicação, resultante da atração mútua entre a terra e o corpo.

A força de reação normal, sendo uma força de ligação, irá depender da superfície do carril, da velocidade do objeto, do peso aplicado (que será mais abaixo provado através das equações conseguidas a partir da segunda lei de Newton) entre outros fatores. Esta é aplicada pelo carril no corpo e será, em qualquer instante, perpendicular ao plano da superfície do carril e irá afetar a trajetória do corpo.

Como a força normal será sempre perpendicular à superfície dos carris e durante o looping, estes têm uma forma semelhante a uma circunferência, então a força normal irá variar a sua direção em todos os instantes e o movimento será aproximadamente circular, logo para o estudarmos teremos de considerar um referencial de eixos ligado à partícula e que muda de posição e orientação em todos os instantes.

Para este referencial, podemos designar um eixo como eixo tangencial na direção $\vec{et}$ que, terá sempre a direção da velocidade e um eixo perpendicular ao primeiro, o eixo normal, com direção $\vec{en}$, que será sempre perpendicular à superfície, tendo assim a direção da força de reação normal, que aponta sempre para o centro da trajetória circular.

Como, teoricamente, não há barreiras laterais no looping, para impedir que o corpo saia deste, então não há qualquer força aplicada perpendicularmente ao plano vertical onde é descrito o arco de circunferência do looping, logo podemos não considerar um terceiro eixo do referencial ligado à partícula, que seria perpendicular ao plano vertical em questão. Apesar disto, se durante a realização da montanha russa, devido a irregularidades dos carris e a forças de atrito, houver necessidade de colocar algumas barreiras laterais para que a bola não saia disparada pelos lados do looping, então passarão a existir forças perpendiculares ao plano vertical, a serem aplicadas na bola, fazendo com que as deduções teóricas sejam menos precisas.

Podemos, então, começar a analisar as forças e acelerações, aplicadas no corpo quando este percorre o looping. Para isto vamos considerar apenas alguns pontos fulcrais onde o estudo será simplificado, devido à orientação do peso em relação ao referencial ligado à partícula, cuja direção acompanha a direção da força normal, em qualquer instante. Assim iremos incidir o estudo sobre três instantes onde o corpo se encontra em três posições distintas.

- Instante em que o corpo se encontra no ponto mais baixo do looping: Posição A
Neste instante a velocidade do corpo é máxima, pois a altura é mínima, dentro do looping. Aqui, o eixo tangencial do referencial é horizontal, tendo a direção e o sentido da velocidade e o eixo normal aponta para o centro da trajetória. É então possível concluir que: a força resultante com direção tangencial será nula pois o peso e a normal têm a direção do eixo normal, logo o módulo da velocidade mantém-se constante neste instante; como a velocidade do corpo tem de mudar de direção de maneira a percorrer o looping, então tem de existir uma força resultante com componente centrípeta, de maneira ao corpo não “atravessar os carris”. Assim, como a força normal tem sentido centrípeto e o peso sentido centrífugo, então a normal terá de ter intensidade superior ao peso.

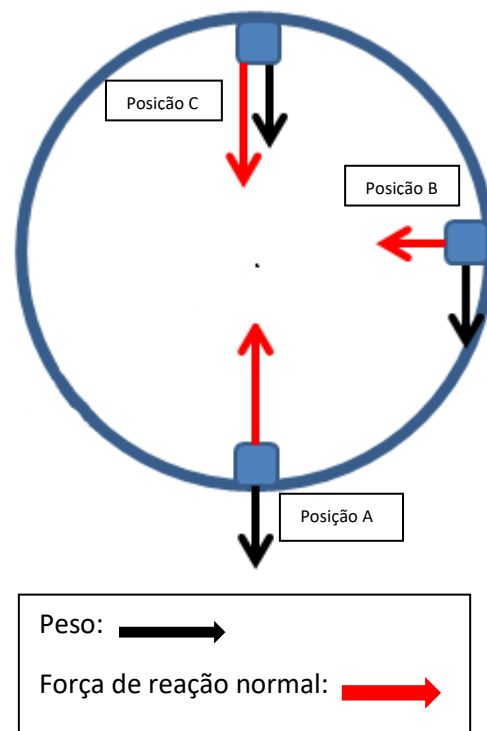


Fig.2 – Representação da normal e do peso, durante o looping

As equações paramétricas que descrevem as forças aplicadas neste instante serão:

$$\begin{cases} F_t = m a_t \\ F_n = m a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m a_t \\ N - P = m a_c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_t = 0 \\ N = P + m \frac{v^2}{r} \end{cases}$$

Como o corpo tem um movimento aproximadamente circular, então terá sempre aceleração centrípeta maior do que zero, sendo sempre igual a: $a_c = \frac{v^2}{r}$, sendo v a velocidade instantânea do corpo e r o raio da circunferência correspondente ao arco de circunferência em que o corpo se encontra nesse instante.

Depois de passar na posição A, o corpo prossegue o looping, subindo, o que aumenta a sua altura e diminui o módulo da sua velocidade. Esta diminuição da velocidade pode ser justificada pela aceleração causada pelo peso, que durante a subida tem uma componente eficaz P_t contrária ao sentido do movimento.



- Instante em que o corpo se encontra no ponto a meio da “subida” do looping:

Posição B

Neste instante a velocidade do corpo é menor do que na posição A. Aqui, o eixo tangencial do referencial é vertical, tendo a direção e o sentido da velocidade e o eixo normal aponta para o centro da trajetória. É então possível concluir que: a força resultante com direção tangencial não será nula, sendo igual ao peso, pois este tem direção vertical e a força de reação normal tem direção horizontal. Como o peso tem sentido contrário ao da velocidade, então esta diminuirá em módulo. Existe também uma componente da força resultante com direção radial e sentido centrípeto, igual à força normal, sendo então unicamente responsável pela variação da direção da velocidade da bola. As equações paramétricas que descrevem as forças aplicadas neste instante serão:

$$\begin{cases} F_t = m a_t \\ F_n = m a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -P = m a_t \\ N = m a_c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_t = -g \\ N = m \frac{v^2}{r} \end{cases}$$

- Instante em que o corpo se encontra no ponto mais alto do looping: Posição C
Neste instante a velocidade do corpo é mínima, pois a altura é máxima, dentro do looping. Aqui, o eixo tangencial do referencial é horizontal, tendo a direção e o sentido da velocidade e o eixo normal aponta para o centro da trajetória. É então possível concluir que: a força resultante com direção tangencial será nula pois o peso e a normal têm a direção do eixo normal, logo o módulo da velocidade mantém-se constante neste instante. Tanto o peso, como a normal, têm a mesma direção e sentido.

As equações paramétricas que descrevem as forças aplicadas neste instante serão:

$$\begin{cases} F_t = m a_t \\ F_n = m a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m a_t \\ N + P = m a_c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_t = 0 \\ N = m \frac{v^2}{r} - P \end{cases}$$

Depois da posição C, o corpo vai descer a parede do looping onde o comportamento que este adota é semelhante ao comportamento adotado quando subiu inicialmente o looping, apenas com a diferença de em vez de ser um movimento curvilíneo retardado como era em B (e em toda a subida), é um movimento curvilíneo acelerado, pois a componente tangencial do peso tem, em qualquer instante, a direção e o sentido da velocidade.

Condições de segurança no looping

Para perceber quando é seguro percorrer um looping, tendo a certeza de que não vamos cair a meio do mesmo, precisamos de recorrer à definição de projétil e de movimento de um corpo sobre a ação de uma força de ligação.

Um projétil é um corpo lançado com velocidade inicial e que está apenas sujeito à ação do peso, o que faz com que este caia, descrevendo uma trajetória parabólica.



Um corpo em movimento, sobre a ação de uma força de ligação, é um corpo cujo movimento (trajetória e velocidade) são controlados por uma força de ligação, neste caso a força normal.

Ora, como no looping apenas estão aplicadas o peso e a força normal, então o corpo comporta-se como um corpo em movimento, sobre a ação de uma força de ligação, mas se a força normal deixa de ser aplicada, então o corpo passa a cair, comportando-se como um projétil, o que implica que este saia do carril, pois estes já não estão em contacto, o que pode causar um acidente.

Assim, para garantir a segurança de um looping e dos seus passageiros, temos de garantir que a força normal é sempre maior do que zero, de maneira a estar em contacto com a superfície do looping.

Na posição A, como $N = P + m \frac{v^2}{r}$, então N é sempre maior do que zero, porque o corpo tem sempre massa, logo existe sempre peso. Assim, na posição A, a segurança está garantida.

Na posição B ou na posição simétrica desta, na descida, $N = m \frac{v^2}{r}$, logo basta a velocidade ser diferente de zero para que a segurança esteja garantida. Como para que o corpo tenha velocidade suficiente para chegar ao topo do looping e poder completá-lo, a velocidade em B não pode ser zero, então, em princípio se em C a segurança estiver garantida, em B e na sua posição simétrica, também estará.

Na posição C:

$N = m \frac{v^2}{r} - P$, logo para que a força normal seja maior do que zero:

$$m \frac{v^2}{r} - P > 0 \Leftrightarrow m \frac{v^2}{r} > mg \Leftrightarrow \frac{v^2}{r} > g \Leftrightarrow v > \sqrt{rg}$$

Logo para que o looping possa ser feito em segurança, a velocidade do corpo no ponto de altura máxima do looping tem de ser maior do que $\sqrt{rg}$.

Caso o corpo não tenha a velocidade suficiente para percorrer a posição C sem que a força normal seja anulada, então podemos tentar diminuir a velocidade mínima necessária para isto acontecer. Como esta é igual a $\sqrt{rg}$ e a aceleração gravítica é constante, então se o raio do looping for menor, então a velocidade necessária será menor.

Mas e se quisermos manter a altura do looping a mesma, mas o corpo não tem velocidade suficiente para percorrer o looping em segurança, na posição C, sendo que este tem uma forma circular?

Para resolvermos este problema, é necessário perceber que o raio r na fórmula $\sqrt{rg}$ não é referente ao raio total do looping, mas sim ao raio correspondente à circunferência da qual faz parte o arco de circunferência onde o corpo se encontra na posição C. Logo se diminuirmos apenas o raio do arco de circunferência no topo do looping, então a velocidade necessária neste ponto para que o corpo realize o looping em segurança irá diminuir, resolvendo o nosso problema sem diminuir a altura do looping. Este ficará então, com a forma de uma elipse em que o diâmetro maior é o vertical.



Para que a velocidade na posição C do looping seja igual a $\sqrt{rg}$, então a velocidade na posição A tem de ser, tal que:

$$\begin{aligned}Em_A &= Em_C \\ \Leftrightarrow Ec_A + Epg_A &= Ec_C + Epg_C \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}mV_A^2 + 0 &= \frac{1}{2}mV_C^2 + mgh_C \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}V_A^2 &= \frac{1}{2}V_C^2 + gh_C \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2}V_A^2 &= \frac{1}{2}V_C^2 + g2r \\ \Leftrightarrow V_A^2 &= V_C^2 + 4rg \\ \Leftrightarrow V_A &= \sqrt{V_C^2 + 4rg} \\ \Leftrightarrow V_A &= \sqrt{\sqrt{rg}^2 + 4rg} \\ \Leftrightarrow V_A &= \sqrt{rg + 4rg} \\ \Leftrightarrow V_A &= \sqrt{5rg}\end{aligned}$$

Assim, é possível concluir que para que um looping qualquer seja seguro e o corpo que o irá percorrer faça-o sem sair do carril, então a velocidade no ponto mais baixo do looping tem de ser maior ou igual a $\sqrt{5rg}$, sendo que o looping tem forma obrigatoriamente circular, r seja o raio do looping, e g a aceleração gravítica (considerando as forças de atrito desprezáveis).

Conforto dos passageiros de uma montanha russa, a percorrer um looping

Apesar de sabermos que, se a velocidade inicial de um looping for maior ou igual a $\sqrt{5rg}$, o looping é percorrido em segurança, esta condição não garante o conforto dos passageiros, pois este não define a aceleração centrípeta a que estes estão sujeitos. Por isso, quando se constrói um looping também temos de ter em atenção a aceleração a que os passageiros são sujeitos pois se esta for muito elevada, o ser humano pode se sentir mal ou mesmo sofrer lesões. Por exemplo, um ser humano normal, consegue aguentar acelerações de até 5 gs (cinco vezes a aceleração gravítica sentida na superfície da terra, o que equivale a aproximadamente 50 m/s^2) mas, acelerações superiores a 3gs podem ser bastante desconfortáveis para uma pessoa comum. Dessa forma, é necessário garantir também que a aceleração sentida em qualquer momento no looping não ultrapassa os 3gs.

Como a aceleração centrípeta ao longo do looping é: $a_c = \frac{v^2}{r}$, então, no caso da aceleração sentida pelos passageiros do looping ser muito elevada, a velocidade inicial do looping deve ser diminuída e o raio aumentado.



Como a velocidade diminui quando se sobe o looping, então a aceleração centrípeta sentida pelos passageiros do looping diminui ao longo da primeira metade do looping e aumenta na segunda metade, caso este seja circular. Assim, a aceleração centrípeta máxima será no instante inicial do looping, logo se quisermos que a aceleração máxima diminua, podemos aumentar o raio do arco de circunferência na posição A, mantendo o resto do looping igual, o que faz com que a sua forma fique diferente e semelhante a uma elipse.

Lançamento oblíquo

Lançamento oblíquo de alcance máximo

Outro requisito para a montanha russa que iremos construir é esta ter pelo menos um lançamento com um alcance de pelo menos um metro.

Assim, como a nossa montanha russa vai estar apoiada sobre uma mesa e pretendemos lançá-la de forma a que entre em contacto com o chão com pelo menos 1 metro de alcance, então para estudarmos o lançamento oblíquo presente, precisamos de ter em consideração que:

- A velocidade inicial de lançamento do corpo tem direção paralela à da rampa;
- A bola é lançada com uma altura inicial diferente de zero, considerando o referencial para a altura, o chão;
- A aceleração sentida pelo corpo é igual à aceleração gravítica, tendo, portanto, uma componente vertical.

Assim, temos de considerar que a bola é lançada com velocidade inicial, segundo o ângulo da rampa, logo esta pode ser decomposta numa componente vertical e numa componente horizontal. (se considerarmos um referencial fixo cujo eixo xx é paralelo ao chão com a direção do lançamento da bola e o eixo yy é perpendicular ao chão).

$$v_{ox} = v_o \cos(\alpha) \text{ (m/s)}$$

$$v_{oy} = v_o \sin(\alpha) \text{ (m/s)}$$

(Sendo v_o a velocidade inicial do projétil)

Para além disso, podemos também saber que a aceleração segundo o eixo xx é nula, logo a velocidade neste eixo é constante e igual à sua velocidade inicial. $v_{ox} = v_x$

A velocidade segundo o eixo yy , varia ao longo do tempo, porque ao existir uma aceleração constante segundo este eixo com sentido contrário à velocidade inicial, então o movimento é inicialmente uniformemente retardado, até a velocidade ser nula e depois aumenta até o corpo tocar no chão, sendo este um movimento uniformemente acelerado.

Podemos então concluir que segundo o eixo xx , estamos perante um movimento uniforme e segundo o eixo yy , um movimento uniformemente variado.



As equações paramétricas deste movimento são:

$$x(t) = v_x t \text{ (m)}$$

$$y(t) = y_o + v_{oy} t + \frac{a}{2} t^2$$

$$\Leftrightarrow y(t) = h + v_{oy} t - \frac{g}{2} t^2 \text{ (m)}$$

Sendo: a a aceleração; t o tempo; y_o a posição inicial do corpo segundo o eixo yy que, aplicado ao problema em questão, é a altura da mesa h ; e g a aceleração gravítica.

O tempo de queda do corpo será igual ao intervalo de tempo entre a saída deste da rampa e o embate do corpo no chão (quando altura do corpo é nula), o que será igual ao instante em que o corpo embate no chão, considerando o instante de saída da rampa como instante $t=0$ s. Logo:

$$y(t_{queda}) = 0$$

$$\Leftrightarrow h + v_{oy} t_{queda} - \frac{g}{2} t_{queda}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t_{queda} = \frac{-v_{oy} + \sqrt{v_{oy}^2 + 4h\frac{g}{2}}}{2(-\frac{g}{2})} \vee t_{queda} = \frac{-v_{oy} - \sqrt{v_{oy}^2 + 4h\frac{g}{2}}}{2(-\frac{g}{2})}$$

$$\Leftrightarrow t_{queda} = \frac{-v_{oy} + \sqrt{v_{oy}^2 + 2hg}}{-g} \vee t_{queda} = \frac{-v_{oy} - \sqrt{v_{oy}^2 + 2hg}}{-g}$$

$$\Leftrightarrow t_{queda} = \frac{v_{oy} - \sqrt{v_{oy}^2 + 2hg}}{g} \vee t_{queda} = \frac{v_{oy} + \sqrt{v_{oy}^2 + 2hg}}{g}$$

Como o tempo de queda tem de ser positivo, então será igual a $\frac{v_{oy} + \sqrt{v_{oy}^2 + 2gh}}{g}$ (s).

O alcance do projétil será igual à posição do corpo, segundo o eixo xx , no instante em que este embate no chão (instante t_{queda}).

$$x(t_{queda}) = v_x t_{queda}$$

$$\Leftrightarrow x(t_{queda}) = v_x \frac{v_{oy} + \sqrt{v_{oy}^2 + 2gh}}{g}$$

$$\Leftrightarrow \text{alcance} = v_x \frac{v_{oy} + \sqrt{v_{oy}^2 + 2gh}}{g} \text{ (m)}$$

Assim, podemos concluir que o alcance será maior se a velocidade segundo o eixo xx for maior e se o tempo de voo for maior (velocidade inicial segundo o eixo yy e/ou a altura inicial aumentarem). Logo, para o mesmo módulo da velocidade inicial, o alcance irá variar consoante o ângulo da rampa (que irá influenciar as duas componentes da velocidade inicial) e, como o alcance aumenta com o aumento tanto da velocidade segundo o eixo xx como a



velocidade segundo o eixo yy, então o ângulo ótimo para o alcance máximo será aquele que melhor consegue maximizar o seno e o cosseno do ângulo da rampa em simultâneo, em função da altura de lançamento inicial, pois esta influência a importância relativa do cosseno e do seno do ângulo da rampa.

Aplicando este conceito, podemos perceber que o ângulo da rampa que nos irá proporcionar o maior alcance possível não será nem de 0 graus nem de 90 graus, mas sim um ângulo intermédio que dependerá em parte da altura inicial da rampa e em parte do módulo da velocidade inicial do projétil.

Caso este fosse um lançamento oblíquo em que a altura inicial da rampa e a altura a que o projétil toca no chão, atingindo o seu alcance, fossem iguais, então o ângulo da rampa que proporcionaria um alcance máximo ao projétil seria, em condições ideais (sem atrito) de 45 graus. Mas como aqui há uma diferença entre a altura inicial e final, torna-se bastante mais complicado de calcular, *à priori*, o ângulo que otimizará o alcance da bola.

Ângulo da rampa de lançamento, necessário para que o corpo seja apanhado pelo funil

Como escolhemos apanhar os berlines no fim do primeiro salto com um funil, foi necessário calcular o ângulo e a velocidade de saída de uma rampa de lançamento, de maneira a conseguirmos controlar, teoricamente, o alcance dos berlines (que pretendemos que seja um metro). (em vez de simplesmente calcularmos o alcance dos berlines com base na sua velocidade de lançamento horizontal, no fim da mesa, no caso de não usarmos um funil nem uma rampa de lançamento).

Para calcular o ângulo que era necessário a rampa ter, começámos por assumir que a rampa de lançamento terá 5 cm de altura e a bola é largada de uma altura de 75cm e, com base nesse valor, podemos determinar a velocidade de lançamento dos berlines, usando a lei da conservação de energia mecânica:

$$E_{mi} = E_{mf}$$

$$E_{pgi} = E_{pgf} + E_{cf}$$

$$Mg(0.75+h_{\text{mesa}}) = mg(0.05+h_{\text{mesa}}) + 1/2mv^2$$

$$v = 3.74 \text{ m/s}$$

Os berlines chegam ao topo da rampa com uma velocidade de 3.74m/s numa direção paralela à da rampa e sentido da esquerda para a direita.

Podemos então decompor essa velocidade na componente relativa ao eixo xx e na componente relativa ao eixo yy, tendo como referência para o eixo xx, o chão, com sentido positivo da esquerda para a direita. Sendo α o ângulo da rampa de lançamento:

$$v_x = v \cos \alpha = 3.74 \cos \alpha \text{ (m/s)}$$

$$v_y = v \sin \alpha = 3.74 \sin \alpha \text{ (m/s)}$$

Admitindo que 0.70 metros é o valor da altura da mesa onde a montanha russa vai estar pousada e que o funil dista 0.05 metros do chão (mesma altura do que a rampa em relação ao tampo da mesa), podemos então determinar as equações paramétricas do salto dos



berlindes, nas componentes xx e yy do referencial, considerando que os berlindes só precisam de diminuir a sua altura em 0.70 metros, durante o movimento.

$$x(t) = 0 + 3.74 \cos \alpha t + 0$$

$$y(t) = 0.70 + 3.74 \sin \alpha t - 5t^2$$

Para calcular α , precisamos de fazer um sistema de equações, calculando o tempo de queda, isto é, o instante t em que $x(t) = 1$ e $y(t) = 0$.

$$\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = 0 \\ 1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.74 \cos \alpha t = 1 \\ 0.70 + 3.74 \sin \alpha t - 5t^2 = 0 \\ 1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 17.3^\circ \vee \alpha = 72.1^\circ \vee \alpha = -17.3^\circ \vee \alpha = -72.1^\circ \\ \alpha = -17.1^\circ \vee \alpha = 72.1^\circ \\ t = 0.28 \text{ s} \vee t = 0.87 \text{ s} \end{cases}$$

(a última linha do sistema é necessária para que seja possível resolvê-lo)

Neste sistema obtemos várias soluções de possíveis ângulos e tempos de queda, mas ao verificar cada um dos valores, apenas o valor de 72.1° resolve o sistema corretamente, correspondendo a um tempo de queda de 0.87s.

Verificação do resultado $\alpha = 72.1^\circ$:

Velocidade no topo da rampa de lançamento:

$$v_x = 3.74 \times \cos 72.1^\circ = 1.15 \text{ m/s}$$

$$v_y = 3.74 \times \sin 72.1^\circ = 3.56 \text{ m/s}$$

$$x(t) = 1 \Leftrightarrow 1.15t = 1 \Leftrightarrow t = 0.87\text{s}$$

$$y(t) = 0 \Leftrightarrow 0.70 + 3.56t - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0.87\text{s}$$

Assim podemos concluir que se a rampa de lançamento tiver uma altura de 0.05 metros em relação ao tampo da mesa, a mesa tiver 0.70 metros de altura, o funil estiver a 0.05 metros de altura do chão e não houver forças não conservativas aplicadas nos berlindes, então a rampa precisa de ter um ângulo de 72.1° para que estes tenham um alcance de exatamente 1 metro, com um tempo de voo de 0.87 segundos.

Apesar de este ângulo estar teoricamente correto, é muito inclinado e então na prática pode não resultar, até porque as forças de atrito são significativas. Por isso é necessário ser testado e corrigido ao construir a montanha russa, de maneira aos berlindes terem o alcance correto.

Como já sabemos as equações paramétricas do movimento de salto dos berlindes, é então possível perceber que a trajetória adquirida será uma parábola (uma das equações é de primeiro grau e a outra é de segundo grau). Nesta sabemos que os berlindes atingem a altura máxima no instante $t = 0.36$, com uma altura de 1.33 metros e com 0.41 metros já percorridos no eixo xx do referencial.

Curvas feitas pelos berlindes ao longo da montanha russa

Ao longo da montanha russa, criámos várias curvas num dos percursos, com o ímpeto de imitar os anéis à volta de saturno. Apesar de algumas dessas curvas não serem



completamente paralelas ao plano horizontal da mesa, nesta introdução teórica apenas iremos desenvolver e explicar os princípios físicos responsáveis pela mudança de direção da velocidade dos berlines em curvas paralelas à mesa.

Nestas, é necessário alterar a direção da velocidade da bola, mantendo, idealmente, o módulo da velocidade da bola constante. Assim estamos perante parte de um movimento circular uniforme. Para que os berlines percorram a curva, tem de existir uma aceleração perpendicular, em qualquer instante, à velocidade da bola fazendo com que esta mude de sentido, o que implica que haja uma força aplicada no berlinde, com direção radial e sentido centrípeto.

Sendo este um movimento circular uniforme, então a aceleração é: $a_c = \frac{v^2}{r}$ e, consequentemente a força aplicada é $F_c = ma_c \Leftrightarrow F_c = m \frac{v^2}{r}$, sendo m a massa do berlinde, v o módulo da velocidade deste e r o raio da curva.

Conseguimos então perceber que, tal como o looping, quanto maior o módulo da velocidade e menor o raio da curva, maior a força centrípeta necessária para manter os berlines nos carris.

É também possível perceber que se a força centrípeta aplicada no berlinde for alguma vez menor do que $m \frac{v^2}{r}$, então a força centrípeta já não será suficiente para que o berlinde se mantenha no carril o que quer dizer que a bola sai dos carris com velocidade de direção perpendicular ao raio da circunferência que passa no último ponto da curva no instante exatamente antes de o berlinde sair dos carris (segundo a primeira lei de Newton). Assim, para se garantir a segurança dos berlines, é necessário garantir que $F_c = m \frac{v^2}{r}$ em qualquer instante, sendo que esta força tem de ser aplicada por uma barreira lateral que entra em contacto com o berlinde, exercendo uma força normal, que corresponde ao par ação-reação da força aplicada pelo berlinde nessa mesma barreira e que é resultado da inércia do berlinde. Isto quer dizer que de maneira a os berlines percorrerem a curva, tem de existir uma barreira lateral que aplique esta força ou os carris têm de estar ligeiramente inclinados para o centro da curva, criando o mesmo efeito que uma barreira.

Elevador

Nesta montanha russa, decidimos também utilizar um elevador cuja função será explicada mais à frente neste relatório. A ideia por detrás deste elevador é subir uma caixa que contenha uma bola, usando um contrapeso, preso à caixa com um fio que atravessa uma roldana presa mais acima.

Para podermos compreender como este elevador funciona, é necessário começar por analisar as forças aplicadas tanto no contrapeso como na caixa.

Como a caixa é mais pesada do que o contrapeso, inicialmente, esta vai se encontrar pousada, em repouso, no chão e nela vão estar aplicadas: o peso, com direção vertical e sentido de cima para baixo; a força de reação normal, aplicada pelo chão com direção vertical e sentido de baixo para cima; a tensão, aplicada através do fio, pelo contrapeso, na caixa, com direção vertical e sentido de baixo para cima.



Durante estes instantes iniciais, o contrapeso também está em repouso, mas no ar e nele são aplicadas duas forças com igual intensidade e que se anulam: o peso, com direção vertical e sentido de cima para baixo; a tensão, aplicada através o fio, pela caixa, com direção vertical e sentido de baixo para cima.

Como as tensões aplicadas em cada um dos corpos constituem um par ação-reação, então estas têm a mesma intensidade em qualquer momento. Para além disso, é também importante perceber que como os corpos estão ligados por um fio, então estes terão, em qualquer instante, acelerações iguais em módulo.

Quando quisermos que o sistema caixa + bola seja içado, será necessário aumentar a massa no contrapeso até que esta seja maior do que a massa da caixa, de maneira a que a tensão aplicada na caixa seja maior do que peso aplicado nesta, criando uma aceleração com sentido para cima na caixa e, consequentemente, sentido para baixo no contrapeso.

Quando tanto a caixa como o contrapeso estiverem suspensos, sem tocar no chão, o que torna a força de reação normal nula, então as forças aplicadas na caixa serão: o peso, com direção vertical e sentido de cima para baixo; a tensão aplicada através do fio, pelo contrapeso, com direção vertical e sentido de baixo para cima. E as forças aplicadas no contrapeso serão: o peso, com direção vertical e sentido de cima para baixo; a tensão aplicada através do fio, pelo contrapeso, com direção vertical e sentido de baixo para cima.

Apesar de parecer que as forças aplicadas nos corpos são iguais, quando estes estão os dois suspensos, essa afirmação não é totalmente verdadeira, porque apesar de serem aplicados nos dois corpos a tensão e o peso, tendo a tensão igual intensidade, direção e sentido nos dois, o peso depende da massa de cada um e por isso pode ser e é diferente entre os dois.

A massa dos dois corpos é diferente porque para que se consiga iniciar o movimento do elevador, quando a caixa está no chão, é necessário que o peso do contrapeso seja maior do que o peso da caixa. De maneira a fazer com que a tensão aplicada na caixa (previamente igual ao peso do contrapeso, quando os corpos estavam parados) seja maior do que o peso da caixa, criando uma aceleração na caixa com sentido ascendente e consequentemente uma aceleração no contrapeso, o que faz os corpos moverem-se.

Como não é possível retirar massa ao contrapeso, quando os corpos se encontram em movimento, para que as massas se igualem e a aceleração passe a ser nula nos dois corpos, que iriam manter uma velocidade constante. Então o peso do contrapeso será sempre maior do que o da caixa o que faz com que exista uma aceleração constate destes corpos durante o movimento, o que pode vir a aumentar demasiado a velocidade destes.

Isto pode ser comprovado através da análise das equações das forças aplicadas nos dois corpos suspensos, obtidos a partir da segunda lei de Newton.

Para a caixa (cuja massa é m_A):

$$Fr = T - P$$

$$\Leftrightarrow m_A a = T - m_A g$$

$$\Leftrightarrow T = m_A (a + g) \text{ (N)}$$



Para o contrapeso (cuja massa é m_B):

$$Fr = P - T$$

$$\Leftrightarrow m_B a = m_B g - T$$

$$\Leftrightarrow T = m_B (g - a) \text{ (N)}$$

Para as equações, foi considerado como sentido positivo do referencial, o sentido da velocidade/ aceleração de cada corpo, o que é necessário devido ao uso da roldana.

Como sabemos que a aceleração (a) e a tensão T é igual para os dois corpos:

$$m_A (a + g) = m_B (g - a)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{g (m_B - m_A)}{(m_A + m_B)} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Através das deduções feitas, é possível então confirmar que, durante o período em que nenhum dos dois corpos toca no chão, caso a massa dos dois seja igual, então a aceleração será nula, o que quer dizer, que ou os corpos ficam em repouso no ar ou, se tiverem velocidade prévia, continuaram o seu movimento com velocidade constante.

Mas como, na nossa montanha russa, não é possível, depois de tornar a massa do contrapeso maior que a da caixa, para que exista aceleração inicial que inicia o movimento, retirar massa ao contrapeso, igualando-as, então a aceleração será constante durante todo o movimento.



CRONOGRAMA

Data	Descrição
13/9 – 7/10	Realização de cálculos teóricos (ângulo de saída da bola) e realização e entrega do esboço do projeto.
14/10	Recolha do material inicial necessário (base de madeira, madeira para suporte, tubos de aquário); Início da construção – elaboração dos caminhos para a bola, com a união de dois tubos através do uso de pregos e cola quente. Encontro de alguns problemas relacionados com o material.
21/10	Construção dos suportes iniciais, pregando-os à base. Completamento do percurso inicial e instalação do mesmo no suporte de madeira. Encontro de problemas relacionados com o ângulo demasiado íngreme do caminho e com a maleabilidade do tubo de aquário.
24/10	Refazimento do caminho inicial e início da construção do segundo caminho. Reinstalação do caminho inicial no suporte.
25/10	Construção do looping; Encontro de problemas novamente relacionados com a ingremidade do caminho, fazendo com que a bola saltasse; Elaboração de um “túnel” para evitar o salto inicial da bola, permitindo a passagem desta por todo o percurso principal sem obstáculos.
26/10	Instalação do segundo percurso no suporte. Encontro de dificuldades em relação ao alcance que a bola deveria atingir (1m).
8/11	Construção de pequenos suportes e realização da curva do segundo percurso; Construção de um funil de cartão e plástico para apanhar a bola após o salto; Início da realização das decorações.
9/10	Finalização dos dois anéis do segundo percurso; Construção do elevador de água
11/11	Realização do suporte para o elevador de água; Construção do caminho final, visto que o primeiro caminho não permitia atingir o alcance.
14/11	Instalação do caminho final e realização do looping deste; Construção de suportes finais; Construção de um suporte para o funil.
21/11	Instalação de um tubo PVC para a passagem da bola após sair do elevador. Início da pintura e decoração da estrutura.
25/11	Fixação do suporte do elevador à base de madeira; Construção e instalação de um caminho do funil ao elevador de água
28/11	Finalização da decoração da estrutura.

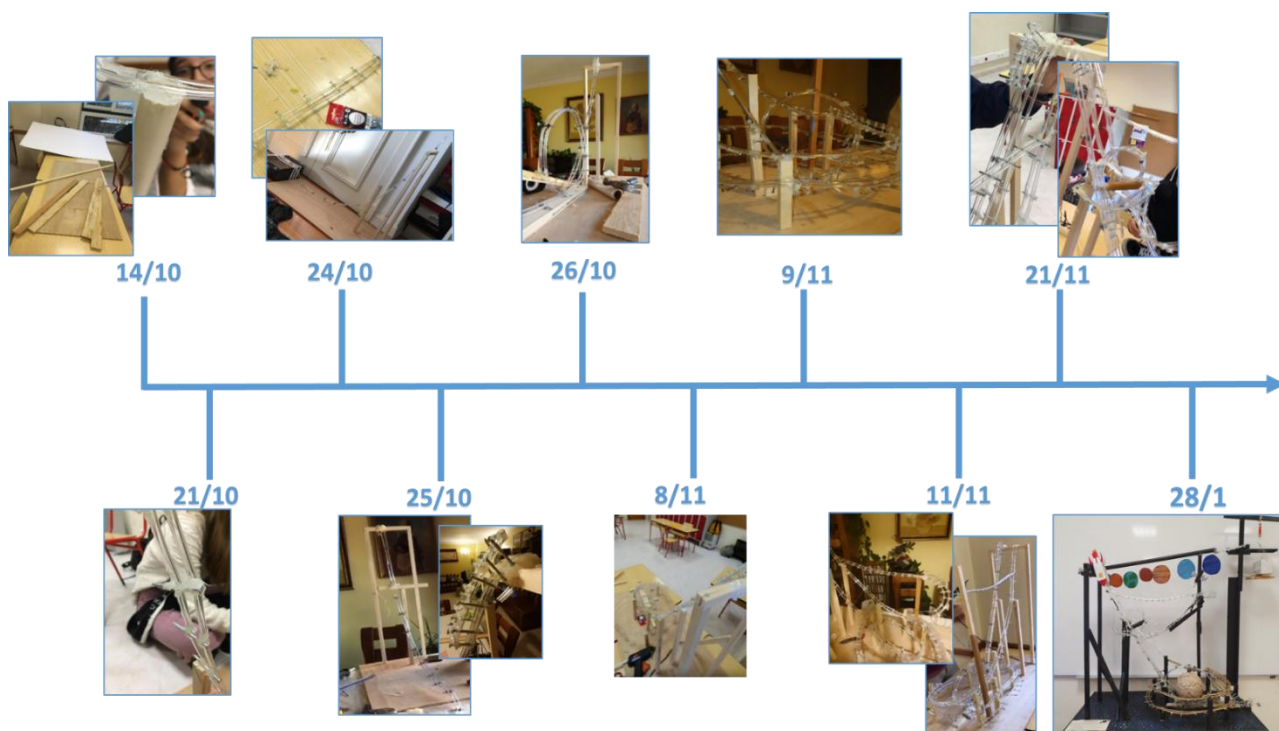


Fig.3 - Cronograma

MATERIAL

- Bola esférica de metal
- Tubos de aquário
- Pregos
- Pistola de cola quente
- Tubos de cola quente
- Base de madeira 80x40
- Varas de madeira compactada de tamanho variado
- Serrote
- Lixa
- Placas de cartão
- Garrafas de plástico
- Roldana
- Fio-norte
- Fio de nylon universal
- Tubo PVC de 66,7 cm
- Pinceis e tinta
- Sprays de tinta
- Fita-cola
- Tesoura
- Bola de esferovite
- Álcool etílico
- Diluente
- Fita métrica

METODOLOGIA

Para iniciar o processo prático da montanha russa, começámos por adquirir materiais simples, devido ao facto de, apesar de inicialmente ainda estarmos com uma ideia vaga do que iríamos construir, sabermos que existiam materiais considerados indispensáveis para a realização do projeto.

Assim, comprámos varas de madeira, pregos, parafusos e encarregámos cada elemento do grupo de trazer de casa ferramentas básicas necessárias para a realização do projeto, tais como: martelo, pistola de cola quente, recargas de cola quente, serrote, tesouras, panos e uma extensão elétrica. Ao longo do tempo, consoante as necessidades que tivemos, fomos acrescentando outros objetos e materiais, mas será tudo mencionado, a fim de evidenciar com clareza a metodologia de trabalho utilizada.

A base principal de madeira foi-nos fornecida pelo professor Vítor Hugo, bem como algumas ripas de madeira. Posteriormente, ao escolhermos a bola que nos pareceu



Fig.4 – Base e ripas de madeira

indicada para ser utilizada, acabámos por também concluir que devíamos usar tubos de aquário para a realização dos caminhos percorridos pela bola.

Nesta etapa, começámos a reunirmo-nos fora da escola para que, com calma, pudéssemos pensar e executar a estrutura de maneira correta e adequada. Tivemos primeiro de ultrapassar a dificuldade de colar os caminhos de maneira eficiente e de forma a garantir estabilidade em todo o percurso. Portanto, após experimentar vários materiais chegamos à conclusão para o tipo de carris que iríamos utilizar. Estes seriam constituídos por dois tubos de aquário paralelos entre si e colados com pregos perpendiculares aos tubos, ao longo do percurso. Para além disso, percebemos também que para maximizar a velocidade da bola e a sua segurança em simultâneo, a bola tem de circular entre os dois tubos, mas ao mesmo tempo, ligeiramente acima destes. Por isso os tubos têm de ser colados a uma distância entre eles, constante e ligeiramente menor do que o diâmetro da bola.



Fig.5 – Carril de tubos de aquário e pregos

Em consequência disso, ocupámos bastante tempo nas aulas apenas a fazer colagens de pregos para a realização de caminhos. Após concluirmos um caminho completo, cortámos, com o auxílio do serrote, a madeira com medidas pensadas, a fim de colocá-la na base e de modo instalar o caminho em cima da estrutura, sendo a madeira, portanto, o material mais resistente e adequado para suportar a estrutura.



Fig.6 – Looping do primeiro caminho

Com os caminhos feitos, tentámos maleá-los de maneira a obter uma forma constituída por uma descida e um looping grande. Para que conseguíssemos chegar à forma com uma descida ideal, sem que a bola saísse desta, e com o maior looping possível, tivemos de recorrer ao método de tentativa e erro. Para nos ajudar a perceber onde é que se encontravam as imperfeições do caminho, gravámos, também, vídeos em câmara lenta com os nossos telemóveis e, assim, conseguimos pôr esta parte do percurso a funcionar.

Embora não tivéssemos colocado o caminho ainda, experimentámos também o looping segurando com as mãos, para ver qual seria o local onde deveríamos inserir o resto das estruturas de madeira. Feitas as várias tentativas, consequentemente, colocámos as várias varas de madeira que faltavam fixar e o caminho ficou assim colado com cola quente à madeira, de maneira a que o caminho ficasse esticado e estável.

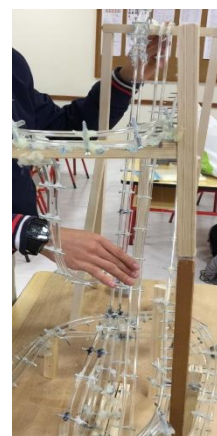


Fig.7 – Segundo caminho



Visto que criámos o looping por tentativas, houve uma fase em que apenas estivemos a aperfeiçoar o looping para que o percurso da bola funcionasse em todos os ensaios. Ganhámos também a percepção de que, quanto mais próximos os pregos estiverem e mais pregos houver no looping, maior estabilidade existe, pois mais fixo se encontra o caminho.

Depois de realizar cerca de trinta ensaios em que a bola realizou o looping com sucesso, retirámos todo o material que estava apenas a ocupar espaço e não contribuía para otimizar o looping. Em seguida, testamos várias inclinações, no final do percurso do looping, com o objetivo do alcance da bola ser um metro, mas apercebemo-nos que de facto não chegava, em nenhum ensaio, a essa distância.

Fig.8 – Looping do primeiro caminho

Dado o nosso sucesso ao conceber um looping com um raio superior a 20 cm, mas em contraste um insucesso no valor do alcance, pensámos fazer um caminho com exclusivo objetivo de realizar o alcance. No entanto, não foi esse o caminho que fizemos em seguida, dado que foram elaborados os “anéis de Saturno”.



Ao serem idealizados os anéis, deparámo-nos imediatamente com algo diferente. Desta vez, o percurso não era todo a direito, de modo que tivemos de ser perspicazes e trabalhar com os tubos de aquário com o objetivo de fazerem a curva adequada à volta do looping. Neste momento do projeto, enquanto alguns trabalhavam na elaboração dos anéis, outros desenvolviam o elevador de água.

Fig.9 – Anéis de Saturno

A realização dos anéis acabou por se resumir a colocar pregos, ajustar caminhos e fazer tentativas para ver se estava a funcionar. Por isso, ao longo do trabalho tivemos a necessidade de colocar algumas estruturas de madeira a mais e dar uso da cola quente para fixar todos os caminhos.

De seguida foi feito o terceiro caminho, em que o principal objetivo da elaboração deste é o alcance da bola ser, pelo menos, um metro, já que não foi possível efetuar esta tarefa no primeiro caminho.

Como era necessário que o caminho do alcance tivesse um looping, então fizemos um looping curto e o mais perto possível da posição inicial, para que a bola tivesse a restante parte do percurso para ganhar velocidade e fosse possível obter o alcance desejado.

Em termos da execução, utilizamos o mesmo método que nos restantes caminhos, e colocamos a parte inicial do caminho entre o primeiro e segundo caminhos, da maneira a que o caminho fosse “discreto” e que não influenciasse a parte estética do nosso projeto.



É importante mencionar que, para atingirmos um melhor desempenho na estabilidade de qualquer um dos caminhos, foi fundamental esticar ao máximo possível os tubos de aquário, pois isso diminui as imperfeições presentes na superfície dos carris e, desse modo, a bola não teria tanta tendência para sair destes. Caso houvessem partes de percurso ligeiramente curvas a bola já teria a tendência de sair do percurso e, por isso, o facto de alinharmos os percursos o máximo possível, foi fulcral para a eficácia da montanha russa.

Para realizarmos o elevador de água, era necessário prender uma roldana numa posição elevada, para que nela passasse um fio que ligasse a caixa ao contrapeso. Assim, construímos uma estrutura de madeira, mais alta do que a posição inicial do terceiro caminho, para que a caixa também possa parar com uma altura maior do que a altura inicial do terceiro caminho, para a bola sair da caixa e ir para este caminho. Depois de fazermos a estrutura de madeira, tivemos de desenvolver uma caixa que iria levar a bola e um contrapeso.

Para a caixa, pensámos que a bola poderia entrar por cima desta e, sendo o chão da caixa inclinado, a bola podia ficar dentro da caixa, numa posição onde existiria um buraco na parede da caixa, que estaria tapado durante a ascensão, de maneira a bola ficar no interior da caixa e, quando a caixa chegasse à sua posição de altura máxima, poderíamos destapar o buraco, fazendo a bola sair para outro caminho. E então fizemos uma caixa dessa forma.

Para o contrapeso, este seria uma garrafa que se podia encher de água. Para facilitar o processo de colocar água no contrapeso, fizemos um buraco na lateral da garrafa onde colámos um tubo de aquário, ligado a outra garrafa que teria água inicialmente. Assim, quando a altura da garrafa onde a água se encontra inicialmente é maior do que a altura do contrapeso, então a garrafa do contrapeso enche-se de água, aumentando a sua massa. Para que o elevador funcionasse, tivemos ainda de ligar a caixa ao contrapeso, com uma corda, passá-la na roldana e testar para que o fio tivesse o comprimento certo.

No final, decidimos decorar a nossa montanha-russa, de acordo com o tema escolhido, através do uso de cartão, que se trata de um material fácil de recortar e pintar, bem como de sprays de tinta, na medida em que são fáceis de utilizar e pintam rapidamente uma vasta área, e pincéis para as áreas mais reduzidas. Além disso, colocamos uma bola de esferovite no centro do looping maior e pintando essa bola com spray da cor dourada demos por concluído o nosso “El Saturno”.

Algumas respostas a perguntas que podem surgir

Porquê tubos de aquário?

Devido à maleabilidade dos tubos, o que nos permite moldá-los consoante a forma que pretendemos obter, bem como ao facto de ser um material com uma superfície bastante polida, reduzindo o atrito, considerámos adequado o uso de tubos de aquário, para a realização dos caminhos da nossa montanha russa.

Porquê o uso de pregos?

A necessidade de usar pregos surgiu de maneira natural. Inicialmente só precisávamos deles para pregar as principais estruturas de madeira. Todavia, ao experimentarmos usá-los para colar os tubos de aquário passou a ser um material essencial para a construção nossa montanha russa.



Porquê o uso de madeira na estrutura?

Quando nos deparamos com o problema de como iríamos suportar todos os caminhos da montanha russa, percebemos que teríamos de usar um material duro, resistente, mas ao mesmo tempo, de fácil manuseamento. Assim, a escolha da madeira foi, para o grupo, bastante óbvia, sendo este o material mais barato e que melhor satisfazia estas características.

Porquê o uso da bola que usámos?

A razão pela qual a bola utilizada foi uma bola metálica pequena, corresponde ao facto de precisarmos que a bola ao realizar o looping grande não colidisse com a bola de esferovite que representa o planeta Saturno.

Além disso, seria indispensável que a bola tivesse pouca massa, pois caso a bola possuísse uma massa demasiado elevada seria mais difícil de alcançar o alcance pretendido. Isto porque, no caso de a bola ter mais massa, faria com que a força de atrito nos tubos aquários fosse maior e diminuiria a velocidade ao ser projetado para o chão.

Porquê três caminhos?

O primeiro caminho foi feito para que se cumprissem os objetivos propostos, no entanto, apenas foi possível cumprir um deles após a sua realização, daí a necessidade de realizar um terceiro caminho.

O segundo caminho foi feito principalmente para conseguirmos implementar o tema escolhido pelo grupo, ou seja, realizar os anéis de Saturno serviu no seu intuito apenas para dar elegância ao projeto. Mas com o decorrer da construção, o caminho dos anéis tornou-se mais complexo fazendo com que desse um aspecto mais movimentado e dinâmico à montanha russa.

Porquê um túnel no primeiro caminho?

Visto que o lançamento da bola tem um papel essencial no funcionamento da nossa montanha russa, criámos um mecanismo que impedisse a bola de sair do caminho criado, com o objetivo de que a bola percorre-se a montanha-russa sempre pelos tubos de aquário.

Pretendíamos, portanto, que a bola não caísse e fosse antes pelos tubos de aquário para evitar que, ao percorrer o caminho, houvessem saltos e existisse uma perda de controlo por parte da bola ao longo do percurso.

Porquê três loopings?

A nossa ideia de criar mais do que um looping surgiu em consequência da necessidade de criação de um terceiro caminho para que o alcance fosse cumprido, já que, no looping maior, tal não se verificou. Assim, ao criarmos o terceiro caminho, foi necessário fazer mais um looping (mais pequeno) para satisfazer os objetivos do trabalho.

O terceiro looping, que está inserido no caminho dos anéis, é feito para satisfazer a nossa necessidade de dar alguma complexidade à montanha russa já que a velocidade com que a bola percorre o segundo caminho não é muito elevada e este caminho, sem o looping, não seria muito emocionante.



Porquê um funil e um elevador de água?

A ideia complexa de criar algo que ligasse o primeiro caminho ao terceiro surgiu essencialmente porque tivemos a necessidade de interligar estes dois caminhos, fazendo com que apenas o terceiro caminho fosse contabilizado como alcance atingido pelo projétil ao sair da montanha russa. Para além disso, quisemos também implementar originalidade no projeto e procurámos ir mais além daquilo que à partida conseguiríamos fazer.

Criámos, então, a hipótese de construir um mecanismo que apanha a bola, depois do primeiro salto, e outro mecanismo que a içasse até ao início do terceiro caminho. Assim, planeamos a construção de um funil que apanhasse a bola e que a conduzisse a um elevador que a içasse, sendo depois conduzida por um caminho e um tubo de PVC até ao terceiro caminho.

Porquê Saturno?

A resposta a esta pergunta para nós é complicada, mas para a percebermos, teremos de recuar até ao início do ano letivo. No começo de tudo, ainda antes de sequer realizarmos cálculos teóricos, refletimos sobre o trabalho e ganhámos a percepção de que o assunto do trabalho deveria estar diretamente relacionado com os conteúdos da disciplina de Física.

Assim, ao centralizarmos a nossa atenção naquilo que principalmente desperta a atenção numa montanha russa – o looping - pensámos que, o que poderíamos fazer relacionado com física e com esse elemento indispensável do nosso projeto tinha de ser algo invulgar e surpreendente.

Deste modo, verificámos que um planeta poderia ser algo adequado para ser inserido dentro de um looping. Um planeta porque é talvez, no âmbito da física, o objeto celeste em forma de esfera mais familiar para nós.

O que nos levou até ao Saturno foram essencialmente os seus anéis característicos que, de forma idealizada, pensámos que poderiam vir a ter não só um efeito admirável e esteticamente satisfatório se fosse implementado na montanha russa, mas também poderiam ser usados para um segundo caminho.

E assim, desde o início do trabalho, demos lugar a esta ideia e, com muito investimento temporal e empenho, acabámos por realizar um “Saturno”.

Porquê o uso de preto e azul-escuro para pintar a montanha russa?

Como o tema da montanha russa, decidido pelo grupo, foi Saturno e o espaço, decidimos, então, criar um ambiente espacial, no qual se pudesse inserir o nosso planeta. Assim, colocámos um foguetão no túnel do primeiro caminho e um satélite na parte superior de uma estrutura, de maneira a dar ênfase de que estamos perante uma situação celeste.

Além disso, com o auxílio de guaches e pincéis fizemos, a uma escala mais pequena, os restantes planetas do sistema solar, para que o nosso planeta se enquadrasse no local onde se situa, o Sistema Solar. Por fim, para criar um ambiente celeste ainda mais apelativo, desenhamos estrelas ao longo da nossa base de madeira que assente todo o projeto.

O porquê de pintarmos os anéis e uma bola de esferovite com tinta spray?

Ao analisarmos o que poderia acontecer ao pintar os tubos de aquário, apercebemo-nos que poderia dar origem uma maior força de atrito, podendo por em causa todo o caminho,



pois a bola poderia não ter velocidade suficiente para o completar. Apesar disso, acabámos por pintar na mesma os carris na zona dos anéis de saturno e, com auxílio do diluente, retiramos a tinta especificamente nos locais por onde a bola percorria o caminho.

A razão pela qual insistimos na pintura dos caminhos que simbolizam os anéis de Saturno, incidiu no facto de querermos destacar a cor dos anéis com o resto da montanha russa. Em adição aos anéis, queríamos também colocar o próprio saturno no local do looping principal e, com tinta spray dourada, pintámos a bola de esferovite que designava o nosso planeta.

PROCEDIMENTO

Para a realização deste projeto, tendo em conta os cálculos realizados e a criatividade que pretendíamos revelar, decidimos então construir as seguintes estruturas – três caminhos (dois tubos de aquário ligados), com três loopings no total; um funil para a bola aterrar após o primeiro salto; um elevador de água, composto por duas garrafas interligadas por um tubo, uma delas ligada por um fio a uma caixa que contém a bola.

Deste modo, adotámos então o seguinte procedimento:

Montagem da estrutura

1. Juntar dois tubos de aquário paralelamente, através da colagem de pregos ao longo do caminho, com cola quente nas extremidades destes, construindo assim os caminhos/calhas onde vai andar a bola;

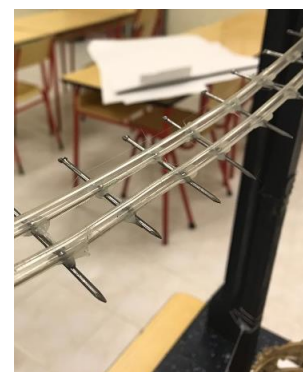


Fig.10 – Caminho/Calha

2. Construir os suportes dos caminhos com madeira, através da fixação de duas varas de madeira de 71,2 cm perpendicularmente a uma base de madeira, com pregos e/ou cola quente. A estas varas, fixar uma vara de 23,5 cm perpendicularmente, permitindo a colagem dos caminhos nesta;
3. Juntar, com cola quente, os caminhos aos suportes de madeira, permitindo assim, obter a altura inicial do movimento da bola;
4. Serrar 12 varas de madeira compactada, com as seguintes medidas – 2x11, 12, 13, 14, 16, 23, 25, 3x45 e 78cm;
5. Fixar as varas de modo a formar suportes para os caminhos ao longo de todo o percurso;

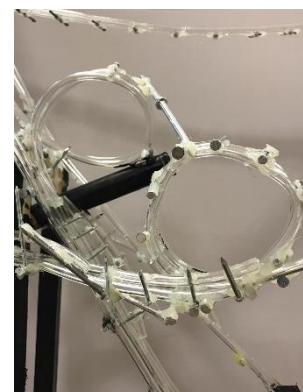


Fig.11 – Fixação dos caminhos aos suportes de madeira

6. Malear os caminhos de tubos de aquário, de modo a formar os loopings e as curvas ao longo do percurso;
7. Construir um “túnel”, com mais uma parte de um caminho, colocando-o paralelamente ao caminho inicial e juntando-os com pregos, de modo a evitar a saída da bola do caminho, e instalá-lo no início do primeiro caminho.

8. Instalar o suporte do elevador na base da montanha russa, com pregos e cola quente, e instalar um tubo PVC (policloreto de vinilo) de 66,7 cm, horizontalmente e com uma pequena inclinação, no suporte dos caminhos principais, para a bola passar após ascender no elevador, de modo a passar para o caminho final;
9. Pintar e decorar a montanha com uma temática espacial, de modo a desenvolver capacidades criativas.



Fig.12 – Decoração (Saturno)

Montagem do funil

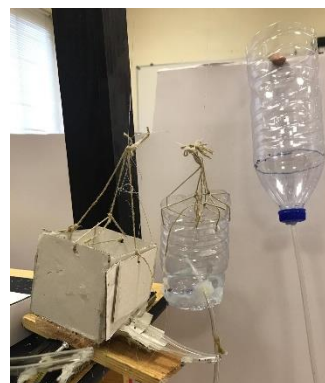
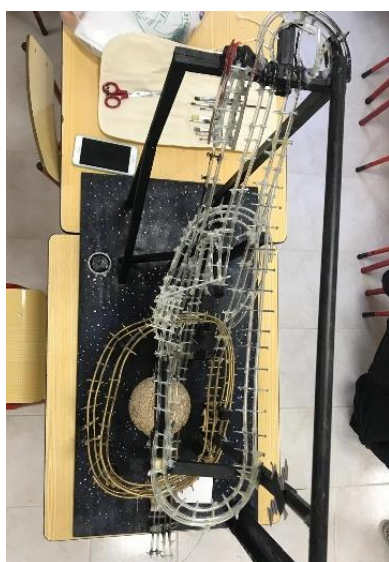
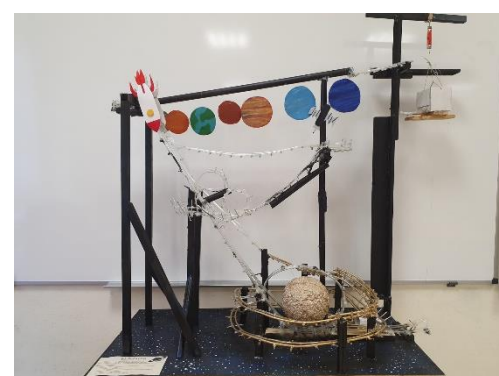
1. Construir um funil de cartão, com pequenas barreiras nas extremidades, que impedem a bola de sair deste;
2. Fazer uma pequena abertura no centro do cartão;
3. Colar na base deste uma pequena parte de cima de uma garrafa, de modo a que a bola entre no funil após o primeiro salto (não atingindo o alcance pretendido) e passe pela abertura na base do cartão, e seguidamente pelo gargalo da garrafa que se colou, sendo assim transferida para um outro caminho;
4. Instalar no gargalo da garrafa colada ao funil, com cola quente, um caminho feito com a mesma técnica (dois tubos ligados paralelamente com pregos), com a finalidade de transportar a bola do funil até ao elevador de água, para depois prosseguir a sua trajetória na montanha russa em si;
5. Construir um caminho de tubos de aquário para a bola passar do funil até à caixa do elevador de água.
6. Construir com 4 paus de 8 cm e 4 transversais a estes de 8 cm, um suporte para o funil não ficar no chão.



Fig.13 – Funil

Montagem do elevador de água

1. Cortar uma garrafa de água de 1,5L ao meio;
2. Ligar a parte de cima da garrafa à parte de baixo com um tubo de aquário;
3. Construir, com cartão, uma pequena caixa com inclinação e uma “porta” de cartão, para onde a bola entra e sobe no elevador, e colar um pequeno troço de madeira em baixo, para dar massa à caixa;
4. Ligar, com fio de pesca de nylon, a parte de baixo da garrafa (que se vai encher com a água que inicialmente está na parte de cima) à caixa de cartão, pela parte de cima de ambos;
5. Construir um suporte de madeira para colocar na base, que vai suportar o elevador de água;
6. Colocar uma roldana na extremidade da vara que serve de suporte e passar o fio de pesca por lá, permitindo assim o movimento ascendente e descendente do elevador de água sem distúrbios;

**Fig.14 – Elevador de água****Fig.15 – Elevador de água****Fig.16 - Vista de cima****Fig.17 - Vista de frente****Fig.18 - Vista lateral**



REGISTO DE RESULTADOS

Massas:

Massa da bola = 8.5g

Massa do sistema “caixa do elevador + bola” = 91.5g

Massa do contrapeso (cheio com água) = 146.0g

Alcance medido experimentalmente para o terceiro caminho:

$$x_1 = 99.5cm$$

$$x_2 = 100.0cm$$

$$x_3 = 99.0cm$$

Tracker:

Após a construção da montanha-russa, foram feitos ensaios experimentais, com a bola a andar em toda a estrutura, sendo lançada da altura inicial de 75cm. Após percorrer todo o percurso, a bola realizou um salto que deve cumprir as normas inicialmente atribuídas de 1 metro de alcance.

Deste modo, foi gravado um vídeo do projétil desde o momento em que abandona a estrutura até ao momento em que atinge o solo. O vídeo foi transferido para o *software* informático *Tracker*, anteriormente utilizado na atividade laboratorial 1.1 – Lançamento Horizontal, e obtiveram-se as equações do movimento para de seguida serem obtidos o alcance e o tempo de voo durante o movimento de queda do projétil.

Os resultados obtidos encontram-se expressos nos gráficos e figuras seguintes, retirados do *software* utilizado.

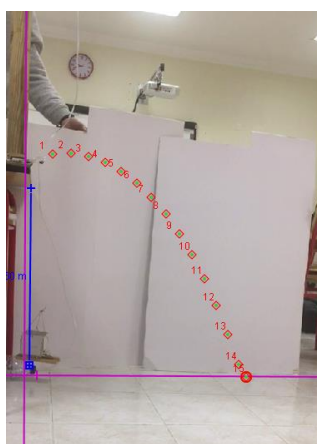


Fig.19 - Representação da trajetória da bola

Dados		
massa A		
t (s)	x (m)	y (m)
0,067	0,191	0,940
0,100	0,264	0,929
0,133	0,336	0,905
0,167	0,403	0,867
0,200	0,470	0,817
0,233	0,531	0,757
0,267	0,593	0,686
0,300	0,651	0,603
0,333	0,705	0,513
0,367	0,757	0,413
0,400	0,806	0,301
0,433	0,856	0,179
0,467	0,904	4,965E-2
0,500	0,934	-2,505E-3

Fig.20 - Tabela das coordenadas da posição (horizontal e vertical – x e y, respetivamente), em função do tempo.

Parâmetro	Valor
A	1,825E0
B	7,674E-2

Fig.21 – Valores para a equação $x(t)=At+ B$

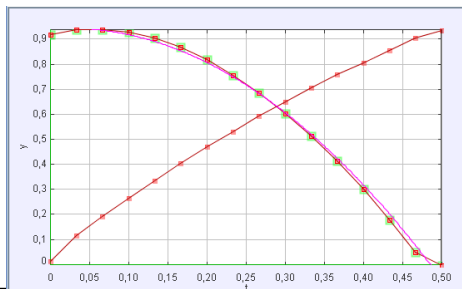


Fig.22 – Parábola que melhor se ajusta aos pontos do gráfico da posição vertical em função do tempo

Parâmetro	Valor
A	-4,439E0
B	2,206E-1
C	9,404E-1

Fig.23 – Valores para a equação $y(t) = At^2 + Bt + C$

Medidas da montanha russa

Altura da mesa onde a montanha russa está apoiada: $\sim 70 \text{ cm}$

Ângulo das rampas de lançamento dos projéteis: $\sim 10,0^\circ$

Diâmetro do looping principal = $\sim 23 \text{ cm}$

Diâmetro dos loopings pequenos = $\sim 8 \text{ cm}$

Comprimento do terceiro caminho (sobre o qual vai ser incidido um estudo mais intensivo): comprimento dos carris antes do looping = $0,49 \text{ m}$; comprimento dos carris depois do looping = $0,75 \text{ m}$; comprimento dos carris no looping = perímetro da circunferência = $0,08 \pi \text{ m}$.

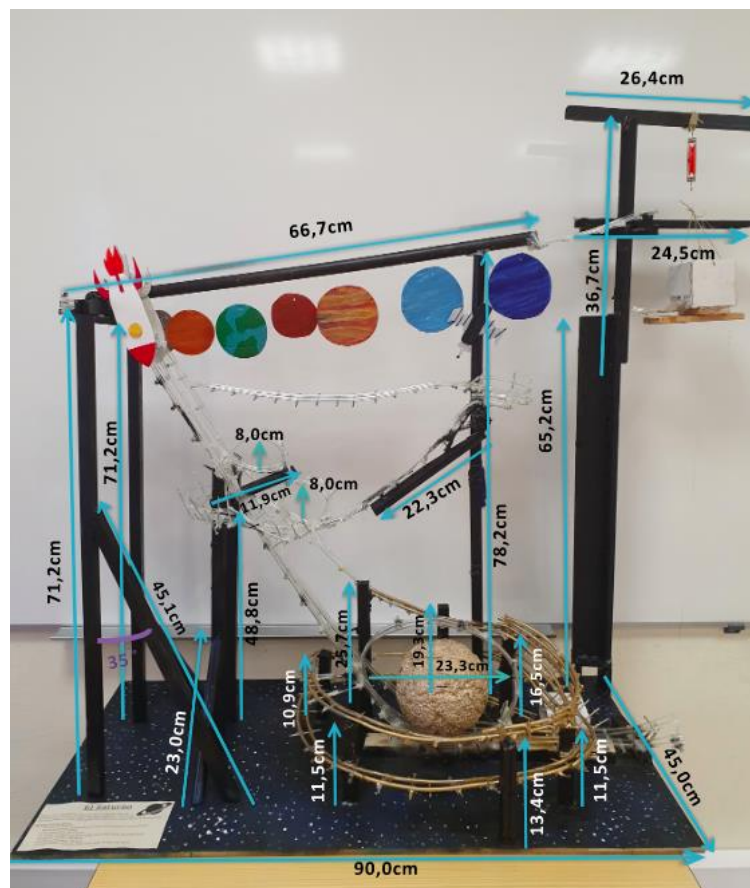


Fig.24 – Medidas da construção



TRATAMENTO DE RESULTADOS

Lançamento oblíquo

$$\text{Alcance experimental: } \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{99.5 + 100.0 + 99.0}{3} = 99.5 \text{ cm}$$

Através da análise dos dados fornecidos pelo *Tracker*, é possível, usando a primeira tabela, retirar o alcance do projétil – distância horizontal máxima, bem como o tempo de voo – tempo máximo em que a bola esteve em movimento no ar. Estes dois valores são possíveis de obter pela análise do último ponto da tabela apresentada, que corresponde ao ponto em que a bola (projétil) atinge o solo.

Assim, o tempo de voo é 0,500s e o alcance do projétil 0,934m, sendo a altura final aproximadamente 0m, tendo em conta que o *software* utilizado não é totalmente certo, visto que é necessário introduzir os pontos manualmente, sendo por essa razão falível.

$$t_{voo} = 0,500s$$

$$\text{Alcance} = x_{max} = 0,934m$$

Pelos resultados obtidos pelo *Tracker*, é possível concluir que a bola não teve o alcance pretendido, caindo a aproximadamente 7cm atrás do valor esperado. Para atingir o valor pretendido, seria necessário, para uma mesma altura de saída do projétil, que este tivesse uma maior velocidade inicial. Apesar disso, como, para os mesmos lançamentos, também foi medido experimentalmente, o alcance de forma direta, e este é igual a 99.5 cm, podemos concluir que o *software* tem alguns problemas de rigor. De qualquer maneira, iremos prosseguir o tratamento de resultados, usando o valor obtido através do *Tracker*.

Após a obtenção do alcance e do tempo de voo, é possível também obter a aceleração gravítica que atuou sobre a bola no movimento de queda. Tal é possível através da obtenção da equação da parábola que melhor se ajusta ao gráfico dos pontos da posição vertical em função do tempo.

Parâmetro	Valor
A	-4,439E0
B	2,206E-1
C	9,404E-1

Fig.25 – Valores para a equação $y(t)=At^2+ Bt+ C$

Pela análise dos valores obtidos na tabela apresentada, obtemos então a equação do movimento vertical (y) em função do tempo (t):

$$y(t) = -4,439t^2 + 0,2206t + 0,9404$$

Assim, conseguimos retirar o valor experimental da velocidade inicial da bola e da aceleração gravítica que atuou sobre a bola durante o movimento de queda, desde o momento em que abandonou a mesa até atingir o solo:



$$v_{0y} = 0.2206 \text{ m/s}$$

$$\frac{1}{2}a = -4,439 \Leftrightarrow a = -8,878 \Leftrightarrow |a| = 8,878 \text{ m/s}^2$$

O valor experimental para a aceleração gravítica é então $8,878 \text{ m/s}^2$, sendo um valor abaixo do valor teórico da aceleração gravítica ($9,8 \text{ m/s}^2$). Deste modo, podemos então calcular o erro relativo da aceleração gravítica para a experiência realizada.

$$E_{\text{relativo}} = \frac{|V_{\text{experimental}} - V_{\text{teórico}}|}{V_{\text{teórico}}}$$

$$\Leftrightarrow E_{\text{relativo}} = \frac{|8,878 - 9,8|}{9,8} \Leftrightarrow E_{\text{relativo}} \approx 0,094 \Leftrightarrow E_{\text{relativo}} (\%) = 9,4\%$$

Ainda é possível obter o valor da componente horizontal da velocidade com que a bola inicia o salto (queda) através da obtenção da equação da reta que melhor se ajusta ao gráfico dos pontos da posição horizontal em função do tempo ($x(t)$).

Ao contrário de um lançamento horizontal, neste lançamento, existe tanto velocidade inicial segundo o eixo xx , como segundo o eixo yy , mas como a aceleração é igual à aceleração gravítica então, durante o movimento de queda, o valor da componente horizontal da velocidade é sempre constante e a posição horizontal inicial é dada por $x_0 = 0\text{m}$. Deste modo, a equação da reta da posição horizontal em função do tempo nestas condições é dada por $x(t) = v_{0x}t$.

Parâmetro	Valor
A	1,825E0
B	7,674E-2

Fig.26 – Valores para a equação $x(t)=At+ B$

Conclui-se assim que a equação pretendida e, seguidamente, o valor da velocidade inicial da bola segundo a componente horizontal do gráfico, são dados pela seguinte expressão:

$$x(t) = v_{0x}t$$

$$\Leftrightarrow x(t) = 1,825t + 0,077$$

$$\Leftrightarrow v_{0x} = 1,825 \text{ m/s}$$

Logo :

$$x(t) = 1,825t \text{ (m)}$$



Como estamos perante um lançamento oblíquo, sabemos que a velocidade inicial do projétil, com que este sai da rampa, tem direção oblíqua, pois será paralela à rampa de lançamento. Assim, como sabemos que a velocidade inicial do projétil se decompõe em $v_{0x} = 1,825 \text{ m/s}$ e em $v_{0y} = 0,2206 \text{ m/s}$ (obtida através da equação do movimento segundo o eixo yy), então a velocidade inicial do projétil e o seu módulo serão:

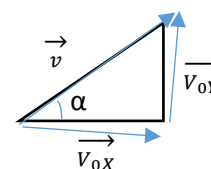
$$\vec{v} = 1,825 \vec{e}_x + 0,2206 \vec{e}_y \text{ (m/s)}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{1,825^2 + 0,2206^2} = 1,838 \text{ m/s}$$

Podemos então resumir que a bola iniciou o seu movimento de queda com uma velocidade de 1,838 m/s, obtendo um alcance de 0,934m, com uma aceleração constante de $8,878 \text{ m/s}^2$.

Para além disso, podemos também saber o ângulo da velocidade de lançamento do projétil, em relação à superfície horizontal da mesa, da seguinte forma:

$$\cos(\alpha) = \frac{v_{0x}}{v} \Leftrightarrow \alpha = 6,8^\circ$$



Este ângulo é bastante diferente do ângulo da rampa que construímos ($10,0^\circ$) e, cujo valor esperávamos obter, recorrendo experimentalmente ao *Tracker*. Esta disparidade de valores pode dever-se a vários fatores que serão, mais à frente, explicitados na crítica. De qualquer maneira, a incerteza relativa associada a esta medição será:

$$I_{relativa} = \frac{|V_{experimental} - V_{teórico}|}{V_{teórico}}$$

$$\Leftrightarrow I_{relativa} = \frac{|6,8 - 10,0|}{10,0} \Leftrightarrow I_{relativa} = 32 \%$$

A partir do valor experimental da velocidade inicial do projétil, podemos ainda obter o valor da intensidade média das forças de atrito aplicadas na bola, durante o terceiro caminho. Para tal, é necessário saber que a distância percorrida pela bola neste caminho é:

$$d = 0,49 + 0,75 + \pi 0,08 \approx 1,49 \text{ m}$$

(admitindo que o comprimento do caminho antes do looping é 49 cm, depois do looping é 75 cm e que o raio do looping é 8 cm)

Para a posição onde a bola é largada, no topo da montanha russa (considerando o referencial da altura para a energia potencial gravítica, o tampo da mesa):

$$Em_i = mgh_i = 0,0085 \times 9,8 \times 0,712 = 0,059 \text{ J}$$



Para a posição onde a bola é lançada, admitindo que a altura da rampa é nula:

$$Em_f = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}0,00851,838^2 = 0,014 \text{ J}$$

Logo:

$$\Delta Em = Em_f - Em_i = 0,014 - 0,059 = -0,045 \text{ J}$$

Como as únicas forças não conservativas que estão aplicadas na bola ao percorrer os caminhos são as forças de atrito, então podemos concluir que:

$$W_{Fa} = W_{Fnc} = \Delta Em = -0,045 \text{ J}$$

$$W_{Fa} = -0,045$$

$$\Leftrightarrow Fa \times d \times \cos\alpha = -0,045$$

$$\Leftrightarrow Fa \times 1,49 \times \cos 180 = -0,045$$

$$\Leftrightarrow Fa = 0,030 \text{ N}$$

Como bolas iguais são usadas nos vários caminhos e os materiais dos carris são os mesmos, então podemos concluir que ao longo da montanha russa, são aplicadas nas bolas, uma força de atrito média de aproximadamente 0,30 N.

Loopings:

Como foi estudado na introdução teórica, para que um looping seja completado em segurança, assegurando que a existe força normal aplicada no corpo, pelo looping em qualquer instante do movimento, assegurando o contacto entre os dois, a velocidade do corpo ao entrar no looping teria de ser pelo menos igual a $\sqrt{5rg}$. Para condições ideais de ausência de forças não conservativas e em que a forma do looping seja circular.

Como experimentalmente, existem forças não conservativas aplicadas nas bolas e, os loopings, sendo são feitos manualmente, não são completamente circulares. Então precisamos de nos assegurar que a velocidade de entrada da bola em cada looping tem de ser maior do que $\sqrt{5rg}$, sendo r o raio do looping.

Para o looping maior, sabemos que a bola é lançada de uma altura igual a 71,2 cm e que esta inicia o looping numa posição de altura nula, em relação ao tampo da mesa, então como o raio deste looping é $\frac{23,3}{2} = 11,65 \text{ cm} = 0,1165 \text{ m}$, podemos verificar se este looping será seguro, em condições de ausência de atrito da seguinte forma:

$$Em_i = Em_f$$

$$\Leftrightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{2 \times 9,8 \times 0,712} = 3,74 \text{ m/s}$$

$$\sqrt{5rg} = \sqrt{5 \times 0,1165 \times 9,8} = 2,39 \text{ m/s}$$



Assim, como a velocidade com que a bola atinge o looping é maior do que $\sqrt{5rg}$, então se não existirem forças não conservativas, as condições de segurança da bola estão garantidas.

Apesar de na realidade existirem forças de atrito significativas, como a velocidade necessária teoricamente para completar o looping em segurança é bastante menor do que a velocidade calculada utilizando o as leis da conservação da energia mecânica, então muito provavelmente, na prática, as condições de segurança também estão garantidas. Esta conclusão pode ser retirada pois na prática, este looping funciona em segurança.

Para os outros dois loopings, é aplicado um raciocínio idêntico a este e podemos acabar também por concluir que as condições de segurança também estão garantidas pois as bolas percorrem estes loopings em segurança.

Elevador

Tal como foi deduzido na introdução teórica, para podermos saber a aceleração e a intensidade da tensão a que a caixa e o contrapeso do elevador são sujeitos, é apenas necessário medir as suas massas. Tal como já foi indicado no registo de resultados, a massa da caixa com a bola é de $91,5\text{g} = 0,0915\text{kg}$ (m_A) e a massa do contrapeso quando está no ar é de $146,0\text{g} = 0,1460\text{kg}$ (m_B). Assim, a aceleração será:

$$a = \frac{g(m_B - m_A)}{(m_A + m_B)} = \frac{9,8(0,1460 - 0,0915)}{(0,0915 + 0,1460)} = 2,25 \text{ m/s}^2$$

Como os dois corpos estão ligados por um fio, então esta aceleração corresponde à aceleração tanto da caixa como do contrapeso. Pela mesma razão, a tensão nos dois corpos será igual em módulo e esta pode ser calculada da seguinte forma:

$$T = m_A(a + g) = 0,0915(2,25 + 9,8) = 1,10 \text{ N}$$



CRÍTICA

No seu geral, após a realização total deste projeto, podemos fazer inicialmente um balanço positivo do trabalho. Após cerca de dois meses de trabalho, incluindo a realização de cálculos, a montagem da estrutura e a elaboração do relatório, obtivemos um resultado pessoalmente satisfatório, na medida em que fomos capazes de não só realizar tudo o que tínhamos inicialmente planeado e ainda acrescentar mais à estrutura, mas também contornar todos os obstáculos e dificuldades que fomos encontrando ao longo da realização do projeto.

Realização de cálculos

Primeiramente, realizámos vários cálculos para obter o ângulo ideal de saída da bola, para obter o alcance pretendido de 1 metro. Todavia, após a montagem da estrutura, apercebemo-nos que os cálculos realizados não correspondiam à realidade. Isto deve-se ao facto de nos cálculos não terem sido consideradas a força de atrito e a força de resistência do ar, que se opõem ao movimento. Assim, com um ângulo inicialmente obtido, a bola tinha um alcance aquém do pretendido, logo, este ângulo não pode ser utilizado para o projeto.

Tal como no salto, na grande maioria da montanha russa, fomos obrigados a executá-la recorrendo ao método da tentativa e erro, devido à impossibilidade de aplicar valores obtidos teoricamente, na montanha russa real, pois nesta existem forças de atrito que são difíceis de prever com cálculos.

Montagem da estrutura

Inicialmente esperávamos construir a nossa estrutura com bastante facilidade, visto que tivemos bastante cuidado na escolha do material a utilizar, de modo a facilitar a montagem e, simultaneamente, obter uma estrutura compacta, segura e resistente. No entanto, deparámo-nos com alguns problemas relacionados com o material logo nas primeiras aulas de montagem. Os tubos de aquário, usados para realizar os caminhos onde anda a bola, eram difíceis de manter completamente esticados e retilíneos, facilmente encurvando-se e moldando-se depois de colados com cola quente. Este fenómeno dificultou a passagem da bola sem adversidades ao longo do percurso. No entanto, após o refazimento de vários caminhos, com a colagem dos tubos com estes totalmente esticados, conseguimos instalar os caminhos da maneira que pretendíamos.

Tivemos ainda dificuldades na instalação dos caminhos da bola na estrutura, com especial destaque para o primeiro caminho realizado (com o looping de maior diâmetro), dado que era o primeiro e ainda tínhamos pouca experiência a trabalhar com aqueles materiais, mas, devido à prática, os seguintes tornaram-se mais fáceis de adaptar ao que pretendíamos. A procura de um salto que obtivesse o alcance de 1 metro por parte da bola, passando pelo looping, levou-nos a instalar o caminho com uma inclinação de descida demasiado íngreme, fazendo com que, por várias vezes, a bola saísse do caminho e realiza-se um movimento de queda no ar, só mais tarde retomando o caminho. Assim, vimo-nos obrigados a diminuir a inclinação de descida da bola, fazendo então um percurso que não tem o alcance pretendido, e a construir um pequeno “túnel” que impedisse o salto da bola no início da rampa de descida. Desse modo, decidimos deixar instalado o caminho inicial e realizar um outro caminho final que obtivesse o alcance, construindo ainda, como já explicado anteriormente, o funil para capturar a bola após o primeiro salto, e o elevador de água, com o objetivo de levar a bola de novo para o topo da estrutura, para depois percorrer este último caminho.



A construção do looping revelou-se também um obstáculo na montagem da estrutura. Inicialmente, foi bastante difícil ter um looping com o diâmetro mínimo pretendido (20cm), pois a velocidade com que a bola iniciava o looping não lhe permitia completá-lo. Além disso, a maneira como os tubos foram maleados fez com que a bola não se mantivesse no caminho durante todo o percurso do looping, muitas vezes desviando a sua trajetória. Após muitas tentativas e mudanças no diâmetro e na inclinação da descida, conseguimos obter um looping de 23 centímetros de diâmetro, em que a bola passa sem qualquer problema durante todo o percurso, tendo velocidade inicial suficiente para completar o looping e acabar com velocidade suficiente para prosseguir o caminho.

De seguida, encontrámos ainda dificuldades em realizar as curvas dos “anéis de Saturno”, no segundo caminho. Para juntar os dois tubos de aquário paralelamente e ao mesmo tempo conseguir realizar a curva mantendo o tubo de aquário esticado, foi necessário juntar o um tubo de maior comprimento, que constitui a parte externa da curva, com um tubo de menor comprimento, constituindo a parte interna. Ainda assim, ao colocarmos a bola a realizar o percurso, esta acabava por saltar para fora da estrutura, continuando numa trajetória retilínea, não realizando a curva, devido ao facto de a força centrípeta exercida pelos carris não ser suficiente para permitir que a bola realizasse a curva com a velocidade que tinha. Deste modo, foi necessário instalar alguns tubos de aquário, iguais ao tubo que constitui a parte externa das curvas, por cima da parte externa da curva, de modo a constituir uma “barreira” e evitar o desvio da trajetória da bola durante a passagem pelos “anéis”.

Ainda referente a estes “anéis”, após a montagem da estrutura, reparámos que, apesar de termos colocado suportes ao longo das curvas de modo à bola subir e descer, não ficando assim com velocidade nula durante o percurso, a bola acabava por perder toda a sua velocidade e parar durante a realização das curvas. Este fenómeno deveu-se principalmente às forças de atrito e ao encurvamento dos tubos já instalados, com cola quente, o que levou a uma maior inclinação dos tubos nas pequenas subidas, não permitindo a bola, já com uma velocidade relativamente reduzida, completar a subida de modo a depois realizar uma pequena descida e prosseguir a sua trajetória. Também foi causado pela pintura dos tubos de aquário na superfície onde anda a bola, aumentando assim a força de atrito que a superfície exerce na bola durante a passagem desta. Assim, tivemos a necessidade de malear recorrentemente os tubos e até de colocar um pouco de óleo, de modo a diminuir o atrito, permitindo então a passagem da bola até ao final do percurso sem que esta perca toda a sua velocidade.

A construção do elevador de água foi, segundo a perspetiva do grupo, das partes mais interessantes do projeto. Ainda assim, também trouxe alguns problemas. Após a instalação do elevador na base de madeira, através do suporte de madeira elaborado, verificou-se que no movimento ascendente da caixa e descendente da garrafa, os objetos embatiam um no outro, não permitindo um movimento sem obstáculos. Foi então fundamental a instalação de um pedaço de madeira junto à roldana, pelo qual passa-se um dos lados do fio, o que separa os dois objetos de forma a estes realizarem os seus movimentos sem adversidades. Após esta instalação, o elevador obteve o seu funcionamento esperado, ainda que a caixa andasse às voltas no movimento ascendente, fazendo com que a bola esta não parasse o movimento na posição pretendida, junto ao caminho de saída, sendo então necessário a movimentação manual da caixa para a colocar na posição pretendida. Outro problema que encontrámos enquanto fizemos o elevador, foi vedar o contrapeso de maneira a não haver fugas de água e



também conseguir encontrar o volume de água necessário para que a caixa suba de forma segura.

Associado ao elevador, construímos também o funil de cartão, o que também foi bastante desafiante pois tivemos algumas dificuldades em criar uma maneira de passar uma bola de cima de um pedaço de cartão para um carril sem que este saísse do carril. Para resolver este problema, tivemos de recorrer à parte de cima de uma garrafa de plástico, pois o seu gargalo é pequeno o suficiente para a bola ser obrigada a cair no carril. Outra parte difícil foi criar o funil com o tamanho e inclinação necessários para que este consiga apanhar sempre a bola, mesmo com algumas diferenças na trajetória entre diferentes ensaios, mas este último problema foi facilmente resolvido com o uso de barreiras laterais para que a bola não escapasse do funil.

Por último, quanto à montagem da estrutura da montanha-russa, após a instalação do último caminho, esperávamos obter um alcance igual ou superior a um metro de comprimento. No entanto, tal não foi evidenciado. A velocidade com que a bola inicia o movimento de queda não se revelou suficiente para ter um alcance de 1 metro. Apesar da altura inicial permitir este fenómeno, a inclinação da descida, a rugosidade da superfície, que leva à ação da força de atrito sobre a bola, e o looping, que retira velocidade à bola durante a realização deste, foram fatores cruciais para o valor esperado não ser atingido. Ainda assim, depois de olearmos a superfície para esta provocar menos atrito na bola, conseguimos pontualmente obter 1 metro de alcance. No entanto, este alcance não é obtido em todas as vezes que lançamos a bola, por isso não pode ser um resultado considerado certo, o que acaba por ser um ponto mais negativo do nosso projeto, dado que era uma das condições a que o trabalho deveria obedecer.

Para terminar, gostávamos também de referir que algo que nos surpreendeu bastante durante a construção da montanha russa foram os multiusos que conseguimos dar aos materiais que comprámos inicialmente e que não serviram apenas para a função inicialmente denominada. Por exemplo: os tubos de aquário que foram comprados para fazer os carris, acabaram por também ser usados no processo de transporte da água até ao contrapeso no elevador; o cartão que arranjámos para fazer decorações, acabou por ser usado para construir um funil que apanha a bola depois do primeiro salto; e os pregos que não só serviram para pregar a madeira, mas também para colar os carris. Como nenhum destes materiais foi escolhido com o objetivo de ser usado para vários fins, quando tal aconteceu, ficámos bastante satisfeitos.

Relatório/obtenção de resultados

Após a construção da estrutura e da realização de experiências, obtivemos alguns resultados importantes para entender e explicar o funcionamento da montanha-russa elaborada, nomeadamente o valor do alcance, da aceleração gravítica durante o movimento de queda e da velocidade com que a bola inicia o movimento de queda. Com estes resultados é-nos possível realizar algumas considerações e críticas, comparando-os ao que pretendíamos obter.

Em primeiro lugar, o alcance obtido satisfaz o objetivo estabelecido de 1 metro. No entanto, este valor não é totalmente certo, dado que a trajetória da bola durante a queda varia de cada vez que é lançada, por vezes não alcançando o 1 metro de alcance pretendido. Deste modo, acabámos por ficar satisfeitos por termos cumprido o objetivo para o valor do



alcance, ainda que este não seja um acontecimento certo. Para tal se verificar, seria necessário que a bola iniciasse o movimento de queda com uma velocidade maior ou que as forças dissipativas aplicadas na bola fossem menores.

Deste modo, o valor que obtivemos para a velocidade inicial no lançamento da bola, considerada projétil neste percurso, foi satisfatório, mas consideramos que poderia ser sensivelmente maior de modo a obter o alcance de 1 metro em todos os lançamentos realizados. No entanto, seria necessário aumentar a altura inicial do movimento da bola, algo que nos foi impossibilitado, dado que foi regulamentado que a estrutura não ultrapassasse os 75cm de altura.

O valor que obtivemos da aceleração gravítica que atou na bola ao longo do movimento de queda foi ligeiramente menor ao valor da aceleração gravítica teórica ($9,8 \text{ m/s}^2$). A discrepância deste valor, bem como os outros dois obtidos através do *software Tracker*, com os valores teóricos, pode ser explicada pelos erros sistemáticos relacionados com o software utilizado.

Ainda que seja uma aplicação extremamente útil e com uma grande variedade de utilidades, o *Tracker* acaba por ser de certo modo falível, dado que é necessário introduzir os pontos referentes a trajetória do objeto que pretendemos trabalhar, a olho e manualmente. Assim, não é possível ter a certeza do centro de massa do objeto, neste caso a bola, durante todo o movimento que pretendemos descrever. Para além disso, umas das maiores fontes de erros neste programa é aquela que consideramos ser a principal causa de discrepâncias tão grandes, por exemplo no ângulo da velocidade de lançamento, é o facto deste estudo ser feito com base num vídeo que tem de ser capturado de forma perfeitamente paralela à trajetória da bola e, caso isso não aconteça, as perspetivas e as medidas dos gráficos inseridos no programa tornam-se errados e podem causar grandes erros. Estas falhas levam a desvios nos valores das equações obtidas, e acabam por resultar em erros relativos consideráveis, como é o caso dos obtidos neste projeto.

Contudo, fazemos um balanço positivo do uso deste programa, pois este permitiu-nos ter acesso a muitos dados fundamentais na obtenção de por exemplo: as forças de atrito médias ao longo do percurso; a aceleração gravítica sentida pelo projétil e a sua velocidade de lançamento; entre outras.

Esse balanço positivo deve-se ainda à exatidão dos resultados obtidos através do *Tracker*, na medida em que não se distanciam demasiado (excluindo o ângulo de lançamento do projétil) dos valores teóricos nem dos valores pretendidos antes da realização do projeto, o que nos permitiu assim ter uma noção do funcionamento correto da montanha russa.

Quanto ao elevador, este, tal como os carris, foi também bastante influenciado pelas forças de atrito pois, apesar de inicialmente apenas planearmos em usar uma roldana para passar o fio que une a caixa ao contrapeso, foi depois preciso colar um pedaço de madeira na estrutura do elevador para afastar a parte do fio que unia a cada corpo para que estes não colidissem no meio do caminho. Dessa forma, apesar de, teoricamente, ser apenas necessário que a massa do contrapeso seja um bocadinho maior do que a massa da caixa com a bola, para que se dê início ao movimento de ascensão, foi necessário aumentar muito mais a massa do contrapeso, juntando mais água, para que fosse possível superar o atrito causado pelo contacto entre o fio e a madeira.



Apesar de todos os problemas descritos anteriormente, o grupo encontra-se muito satisfeito, não só com termos conseguido realizar todos os objetivos que tínhamos proposto inicialmente, no rascunho, mas também conseguimos ir mais além, fazendo um terceiro caminho, um funil e um elevador. Para além do sucesso quanto aos objetivos e ao funcionamento da montanha russa, consideramos também que a parte estética da montanha russa, tal como os planetas, os foguetões, a pintura, etc., foi muito importante no resultado final do nosso projeto pois esta não só tornou a nossa criação mais apelativa, como também representou um tema, o espaço e o planeta Saturno, que interligam as ideias implementadas nos caminhos da montanha russa.



CONCLUSÃO

A realização deste projeto permitiu a melhoria de diversas habilidades, não só ao nível do trabalho de grupo desenvolvido, mas também em relação a capacidades de construção de estruturas utilizando diversos materiais e a técnicas associadas a trabalhos manuais e de decoração.

Foi assim possível, de forma bastante dinâmica e divertida, consolidar inúmeros conhecimentos adquiridos anteriormente em aula e aplicá-los em situação real.

Apesar de o grupo, tanto inicialmente como ao longo da construção da montanha-russa, se ter deparado com diversas dificuldades anteriormente referidas - como por exemplo, a discrepância entre os valores obtidos através dos cálculos e os valores obtidos com montagem da estrutura (ângulo de saída da bola); a instalação dos caminhos na estrutura de modo a permitir uma passagem da bola sem adversidades; a construção do looping; - estas conseguiram ser ultrapassadas após longas horas de trabalho e dedicação.

A utilização do software Tracker, foi, mais uma vez, essencial à realização do trabalho, para estudar o comportamento da bola que foi lançada horizontalmente a partir do terceiro caminho, que obteve um alcance de 1 metro.

A realização deste projeto foi um sucesso, uma vez que os objetivos iniciais foram todos alcançados, apesar de existirem bastantes incoerências ao nível do esboço e cálculos inicialmente feitos comparativamente aos resultados finais obtidos. Apesar disso, o grupo considera-se extremamente satisfeito pois a existência destas incoerências já era, de certa forma, esperada.

De um modo geral, consideramos que este foi o projeto do ensino secundário que nos deu mais gosto realizar, pelo menos até agora, uma vez que construímos algo a partir do “zero” e demos asas à nossa imaginação, tanto na escolha do tema da montanha-russa e da decoração como na própria construção da mesma. Uma das razões para o elevado grau de diversão deste projeto foi o facto de, todas as semanas, termos implementado ideias novas e criativas que acabaram por fazer toda a diferença como, por exemplo, o funil e o elevador de água, e o segundo caminho que simboliza os anéis de saturno.

Apesar do enorme trabalho que este projeto nos deu, valeu a pena todo o nosso esforço, pois o resultado final é algo do qual nos orgulhamos profundamente. O projeto “El Saturno” vai, assim, ficar para sempre marcado como uma grande memória do 12º ano de escolaridade e quem sabe, para a vida.



BIBLIOGRAFIA:

[https://pt.wikipedia.org/wiki/Saturno_\(planeta\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Saturno_(planeta)) (Data de última consulta: 28.11.2019)

https://www.suapesquisa.com/cienciastecnologia/planeta_saturno.htm (Data de última consulta: 28.11.2019)

<https://www.megacurioso.com.br/saturno/58798-fatos-e-curiosidades-sobre-saturno-o-senhor-dos-aneis-do-sistema-solar.htm> (Data de última consulta: 28.11.2019)

<https://www.learner.org/exhibits/parkphysics/coaster/> (Data de última consulta: 14.11.2019)